نظرية الزمر

J.S. Milne

١ أيلول، ٢٠٠٧

مقدمة:

كتبت النسخة الأولى من هذه الملاحظات لطلاب السنة الأولى من خريجي الجبر. كما هو الحال في معظم هذه الدورات، وكانت متركزة على الزمر المجردة، وبشكل خاص، على الزمر المنتهية. بكل الأحوال، إن الزمر المجردة ليست هي المشكلة الوحيدة التي تواجه معظم علماء الرياضيات وإنما الزمر الجبرية، الزمر الطبولوجية، أو، زمر لي، ولا نهتم بالزمر بحد ذاتها فقط وإنما بتمثيلاتها الخطية أيضاً. يتركز اهتمامي (في المستقبل) بتوسيع هذه الملاحظات لتعطي وتنتج مجلداً يبلغ حجمه (٢٠٠ صفحة)، والذي سيبرهن، بشمولية أكثر، مفاهيم مقدمة إلى نظرية الزمر لخريجي الرياضيات، الفيزياء، والمجالات المرتبطة بها.

يرجى إرسال الملاحظات والتصويبات على الموقع math0 at jmilne.org.

V2.01 (٢١ آب، ١٩٩٦). النسخة الأولى على شبكة الإنترنت؛ ٥٧ صفحة.

V2.11 (٢٩ آب، ٢٠٠٣). حددت العديد من الأخطاء الصغيرة؛ الترقيم لم يتغير؛ ٨٥ صفحة.

V3.00 (١ أيلول، ٢٠٠٧). مع التنقيح والتوسيع؛ ١٢١ صفحة.

يمكن القول بأن نظرية الزمر ذات الرتب المنتهية تعود إلى زمـــن كوشـــي. فإليـــه ترجـــع المحاولات الأولى في التصنيف مع مخطط لتشكيل نظرية من عدد من الحقـــائق المنعزلـــة. أدخل غالوا إلى هذه النظرية فكرة في غاية من الأهمية عن الزمـــرة الجزئيـــة (الناظميـــة)، وتقسيم الزمر إلى بسيطة ومركبة. علاوة على ذلك، وبما أن كل معادلة من درجـــة منتهيـــة تقابل زمرة من رتبة منتهية بحيث تعتمد عليها جميع خواص المعادلة، بين غالوا بأن الوصول إلى تطبيقات النظرية يمكن أن يكون بعيداً، وبالتالي فإن الإسهام سيكون أكبر، بـــشكل غيـــر مباشر، لتطوير متتالياتها الجزئية.

قدمت العديد من الإضافات، وبالتحديد من قبل علماء الرياضيات الفرنسيين، مـــن خـــلال منتصف القرن (التاسع عشر). قدم أول عرض تفصيلي للمبرهنة في النسخة الثالثة من قبـــل سيرت "Cours d'Algèbre Supérieure," التي طبعت في عام ١٨٦٦. عرض بعد ذلـــك السيد جـــوردان فـــي عـــام ١٨٧٠ النـــسخة "Traitedes substitutions et des équations algébriques." وقد كرس الجزء الأهم من بحث جوردان بتطوير أفكار غـــالوا وتطبيقاتهـــا لنظرية المعادلات.

لم يحدث تقدم ملحوظ في النظرية، كأجزاء متفرقة من تطبيقاتها، حتى ظهـــور مـــذكرات هير سيلو "Théorèmes sur les groupes de substitutions" فـــي الجـــزء الخـــامس مـــن Mathematische Annalen. منذ تاريخ هذه المذكرات، وخاصة في السنوات الأخيرة، تقدمت النظرية بشكل مستمر.

W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 1897.

أدخل غالوا مفهوم الزمرة الجزئية الناظمية في عام ١٨٣٢، و أشار كاميل جوردان في مقدمة Traité في عام ١٨٧٠ إلى التمييز بين الزمر البسيطة والزمر المركبـــة كمـــا فـــي معظـــم التفرعات الهامة في نظرية زمر التبديلات. بعد ذلك، بدأ جوردان Traité ببناء قاعدة بيانـــات للزمر البسيطة المنتهية – الزمر المتناوبة من الدرجة الخامسة على الأقل والكثير من الزمـــر الخطية التقليدية الإسقاطية على حقول ذات دليل أولي. أخيراً، طبع لودونيغ ســـيلو مبرهناتـــه الشهيرة عن الزمر الجزئية التي رتبها قوى لأعداد أولية في عام ١٨٧٢.

R. Solomon, Bull. Amer. Math. Soc., 2001.

الفهرس

ملاحظات.

نستخدم الرموز الآتية:

$$= \{ 0, 1, 2, \dots \},$$

$\mathbf{Z}$: = حلقة الأعداد الصحيح

= حقل الأعداد الحقيقية

= حقل الأعداد المركبة

الحقل المكون من p عنصر، حيث p عدد أولي $= \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} = \mathrm{F}_p$

لكل عددين صحيحين m, n، $m \mid n$ تعني بأن m يقسم n، أي أن، $n \in m\mathrm{Z}$. نعتبر p في جميع الملاحظات، عدداً أولياً، أي أن،

$. p = 2, 3, 5, 7, 11, \dots, 1000000007, \dots$

لتكن لدينا علاقة التكافؤ، $[*]$ التي ترمز لصف التكافؤ الذي يحوي على $*$. نرمز للمجموعة الخالية بالرمز f. أما قدرة المجموعة S فنرمز لها بالرمز $|S|$ (لذلك فإن $|S|$ هي عدد عناصر المجموعة S، وذلك عندما تكون S منتهية). لتكن A, I مجموعتين، نرمز لمجموعة عناصر A التي أدلتها من المجموعة I، بالرمز $(a_i)_{i \in I}$، وهي عبارة عن تطبيق من الشكل[1] $i \mapsto a_i : I \to A$.

يتطلب وجود الحلقات للحصول على العنصر المحايد 1، وتشاكلات الحلقات لوجود تطبيق تقابل. يكون العنصر a من حلقة ما عنصر وحدة إذا كان له معكوس (عنصر b مثلاً، بحيث يكون $ab = 1 = ba$).

$X \subset Y$، X مجموعة جزئية من Y (ليس بالضرورة مجموعة فعلية)؛

$X \overset{\text{def}}{=} Y$، X تعرّف لتساوي Y، أو تساوي Y بالتعريف؛

$X \approx Y$، X تماثل Y؛

$X \quad Y$، X و Y متماثلان قانونياً (أو إذا كان التماثل وحيداً).

---

[1] A أسرة يجب تمييزها على مجموعة ما. مثلاً، إذا كانت f دالة من الشكل $\mathrm{Z} \to \mathrm{Z}/3\mathrm{Z}$ التي ترسل العدد الصحيح إلى صف تكافئه، عندئذٍ $\{f(i),\ i \in \mathrm{Z}\}$ مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر، حيث إن $(f(i))_{i \in \mathrm{Z}}$ أسرة مع مجموعة بدليل غير منتهي.

الفصل الأول

تعريفات و نتائج أساسية

تعريفات و أمثلة

تعريف 1.1 الزمرة (group) هي كل مجموعة G مع العملية الثنائية

$$(a,b) \mapsto a*b : G\times G \to G$$

تحقق الشروط الآتية:

G_1. (الخاصة التجميعية) لكل $a,b,c\in G$ يكون

$$(a*b)*c = a*(b*c);$$

G_2. (يوجد عنصر حيادي) يوجد عنصر $e\in G$، بحيث يكون

$$a*e = e*a = a \tag{1}$$

لكل $a\in G$

G_3. (يوجد معكوس) لكل $a\in G$، يوجد $a'\in G$، بحيث يكون

$$a*a' = e = a'*a .$$

نختصر عادةً الكتابة $(G,*)$ إلى G. نكتب أيضاً ab بدلاً من $a*b$ و 1 بدلاً من e، أو نكتب $a+b$ بدلاً من $a*b$ و 0 بدلاً من e. في الحالة الأولى، يقال بأن الزمرة ضربية (multiplicative)، وفي الحالة الثانية يقال بأنها جمعية (additive).

2.1 فيما يلي، $a,b,...$ ترمز لعناصر من الزمرة G.

(a) إن العنصر الذي يحقق العلاقة (1) يدعى بالعنصر المحايد (neutral element). فإذا كان e' عنصراً محايداً آخر، عندئذٍ $e'=e*e'=e$. في الحقيقة إن e هو العنصر الوحيد من G، الذي يحقق $e*e=e$ (بتطبيق G_1).

(b) إذا كان $b*a=e$ و $a*c=e$، عندئذٍ

$$b=b*e=b*(a*c)=(b*a)*c=e*c=c$$

وبالتالي فإن العنصر a' في (G_3) معرف بشكل وحيد بدلالة a. يسمى هذا العنصر معكوس (inverse) العنصر a ويرمز له بالرمز a^{-1} (أو يسمى نظير (negative) العنصر a ورمزه $-a$).

(c) نلاحظ من (G_1) أن جداء ثلاثة عناصر a_1, a_2, a_3 من G يكون معرفاً بشكل واضح، فيما إذا شكلنا أولاً a_1a_2 ومن ثم نشكل $(a_1a_2)a_3$، أو نـــشكل a_2a_3 أولاً وبعد ذلك نشكل $a_1(a_2a_3)$، فالنتيجة ستكون نفسها. في الحقيقـــة، يبـــرهن (G_1) أن الجداء لأي n - عدد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من عناصر G معرف بـــشكل واضح. نبرهن على ذلك بالاستقراء الرياضي على n. إن أحد الجداءات قد ينتهي إلى

$$(a_1 \ldots a_i)(a_{i+1}, \quad , a_n) \tag{2}$$

كجداء نهائي، بينما يوجد جداء آخر من الشكل

$$(a_1 \ldots a_j)(a_{j+1}, \quad , a_n) \tag{3}$$

نلاحظ أن التعبيرين السابقين معرفان بشكل جيد، وذلك حسب الفرض الاستقرائي. لذلك، إذا كان $i = j$، فإن (2) و (3) متكافئان. أما إذا كـــان $i \neq j$، عندئـــذٍ يمكن أن نفرض بأن $i < j$. وبالتالي

$$(a_1 \ldots a_i)(a_{i+1} \ldots a_n) = (a_1 \ldots a_i)\left((a_{i+1} \ldots a_j)(a_{j+1} \ldots a_n)\right)$$

$$(a_1 \ldots a_j)(a_{j+1} \ldots a_n) = \left((a_1 \ldots a_i)(a_{i+1} \ldots a_j)\right)(a_{j+1} \ldots a_n)$$

إن التعبيران في الجهة اليمنى متساويان وذلك من (G_1).

(d) إن معكوس $a_1a_2 \ldots a_n$ هو $a_n^{-1} \ldots a_2^{-1}a_1^{-1}$، أي أن معكوس الجـــداء يـــساوي جداء المعكوسات، ولكن بترتيب معاكس.

(e) إن (G_3) يبين بأن قانون الحذف (cancellation) محقق في الزمر، أي أن

$$ab = ac \Rightarrow b = c \ , \quad ba = ca \Rightarrow b = c$$

(بالجداء من اليسار بالعدد a^{-1}) وبالعكس، إذا كانت G منتهية، عندئذٍ فإن قانون الحذف محقق في (G_3)، إن التطبيق $ax : G \to G$ $x \mapsto$ متباين، وبالتالي فهـــو تقابل، بشكل خاص، إذا كان e في صورة التطبيق، عندئـــذٍ يكـــون للعنـــصر a معكوس يميني، وبشكل مشابه، يكون له معكوس يساري، ومـــن (b) نجـــد بـــأن المعكوسين متساويان.

تكـــون الزمرتـــان $(G,*), (G',*')$ متمـــاثلتين إذا وجـــد تطبيـــق تقابـــل $G \leftrightarrow G'$, $a \leftrightarrow a'$، بحيث يكون $(a * b)' = a' *' b'$ لكل $a, b \in G$.

إن $|G|$ رتبة (order) الزمرة G هي قدرة هذه الزمرة. تسمى الزمرة المنتهية التي رتبتها قوى لعدد أولي p بـــ p - زمرة.

لكل عنصر a من G، نعرّف

$$a^n = \begin{cases} aa \ldots a & n > 0 \\ e & n = 0 \\ a^{-1}a^{-1} \ldots a^{-1} & n < 0 \end{cases}$$

إن النتائج الآتية محققة

$$a^n a^m = a^{n+m} \ , \ \left(a^m \right)^n = a^{mn}, \quad \text{لكل } m,n \in \mathrm{Z} \qquad (4)$$

نجد من (4) بأن المجموعة

$$\left\{ n \in \mathrm{Z} \;\middle|\; a^n = e \right\}$$

تشكل إيديالاً في Z، ولذلك فهي تساوي $m\mathrm{Z}$ لبعض الأعداد الصحيحة $m \geq 0$. إذا كان $m = 0$، $a^n \neq e$ باستثناء $n = 0$، عندئذٍ يقال بأن رتبة a غير منتهية. وإذا كان $m \neq 0$، يكون أصغر عدد صحيح $m > 0$، بحيث يحقق $a^m = e$، عندئذٍ يقال بأن رتبة a منتهية. في هذه الحالة، $a^{-1} = a^{m-1}$ و

$$a^n = e \Leftrightarrow m | n$$

أمثلة

3.1 لتكن C_∞ الزمرة $(Z,+)$، و، لكل عدد صحيح $m \geq 1$، لتكن C_m الزمرة $(\mathrm{Z}/m\mathrm{Z},+)$.

4.1 زمرة التبديلات (permutation groups). لتكن S مجموعة ولتكن $\mathrm{Sym}(S)$ مجموعة كل التقابلات $a : S \to S$. نعرّف جداء عنصرين من $\mathrm{Sym}(S)$ بتركيبها على الشكل

$$ab = a \circ b$$

لكل $a, b, g \in \mathrm{Sym}(S)$ و $s \in S$

$$\big((a \circ b) \circ g \big)(s) = a\big(b\left(g\left(s\right)\right)\big) = \big(a \circ (b \circ g) \big)(s), \qquad (5)$$

وبالتالي فإن قانون التجميعي محقق. إن التطبيق المحايد $s \mapsto s$ هو العنصر المحايد في $\mathrm{Sym}(S)$، ويوجد معكوس، لكي تشكل $\mathrm{Sym}(S)$ تطبيقات تقابل. وبالتالي فإن $\mathrm{Sym}(S)$ تشكل زمرة، تدعى بالزمرة التناظرية لـــ S. مثلاً، إن S_n زمرة التبديلات

من n حرف معرفة لتشكل الزمرة التناظرية للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ وهـي مـن الرتبة $n!$.

5.1 لتكن G,H زمرتين، لنبني الزمرة $G\times H$، التي تسمى بالجداء المباشـر لـ G,H. أما كمجموعة، تسمى بالجداء الديكارتي لـ G,H، وتعرف عملية الـضرب كما يلي:

$$(g,h)(g',h')=(gg',hh')$$

6.1 تكون الزمرة G تبديلية (أو آبلية[2]) إذا كان:

$ab=ba$، لكل $a,b\in G$

في الزمرة التبديلية. يكون الجداء المنتهي لأي محموعة S منتهية مـن العناصـر (لـيس بالضرورة أن تكون مرتبة) معرفاً جيداً، الجداء الخالي هو e. عادةً، نتعامـل مـع الزمـر التبديلية على أنها زمر جمعية. تصبح المعادلة (4):

$$(m+n)a=ma+na,\quad m(na)=mna$$

في حالة G تبديلية

$m(a+b)=ma+mb$، لكل $m\in Z$ و $a,b\in G$

وبهذا فإن التطبيق الآتي

$$(m,a)\mapsto ma:\mathrm{Z}\times G\to \mathrm{Z}$$

يحول المجموعة A إلى Z- مودول. في الزمرة التبديلية G، تشكل مجموعة العناصر ذات الرتب المنتهية زمرة جزئية G_{tors} من G، وتسمى بزمرة الفتل (torsion subgroup).

7 .1 ليكن F حقلاً ما. إن المصفوفات من النوع $n\times n$ التي تأخذ عواملها من الحقـل F والتي محدد كل منها لا يساوي الصفر تشكل زمرة $\mathrm{GL}(F)$ تسمى بالزمرة الخطية العامـة (general linear group) من الرتبة n. أما بالنسبة إلى V وهو F - فضاء متجهـي ذو بعد منته، فهو يشكل الزمرة $\mathrm{GL}(V)$ تدعى بالزمرة الخطية العامة لـ V. نلاحظ أنـه إذا كان لـ V n بعد، عندئذٍ نختار قواعد لنعرف التماثـل $\mathrm{GL}(V)\to \mathrm{GL}_n(F)$ الـذي يرسل التماثل الذاتي إلى مصفوفاته مع الحفاظ على القواعد.

[2] إن"الزمرة الآبلية" شائعة أكثر من "الزمرة التبديلية".

8 .1 ليكن V الفضاء المتجهي ذو البعد المنتهي على الحقل F. نتذكر بأن التحويل ثنائي الخطية على V هو التطبيق $f : V \times V \to F$ والذي يكون خطياً عند كل متغير. إن التماثل الذاتي لـ f هو تماثل $\alpha : V \to V$ بحيث يكون

$$f(\alpha v, \alpha w) = f(v, w) \text{ ، لكل } v, w \in V \qquad (6)$$

إن التماثل الذاتي يشكل زمرة $\mathrm{Aut}(f)$. لتكن $e_1, e_2, \ldots, e_n$ قاعدة لـ V، ولتكن $P = \left(f\left(e_i, e_j\right)\right)_{1 \le i, j \le n}$.

مصفوفة f. إن القاعدة المختارة تطابق $\mathrm{Aut}(f)$ مع زمرة المصفوفات النظامية (invertible) A بحيث يكون[3]

$$A^{tr}.P.A = P \qquad (7)$$

إذا كان f متناظراً، أي أن

$$f(v, w) = f(w, v) \text{ ، لكل } v, w \in V$$

وغير شاذ، تسمى $\mathrm{Aut}(f)$ بالزمرة المتعامدة (orthogonal) لـ f.

وعندما يكون f تخالفياً، أي أن

$$f(v, w) = -f(w, v) \text{ ، لكل } v, w \in V$$

وغير شاذ، تسمى $\mathrm{Aut}(f)$ بالزمرة المتعامدة الزوجية (symplectic) لـ f. في هذه الحالة، توجد قاعدة لـ V لأي مصفوفة f التي تكون

$$J_{2m} = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}, \quad 2m = n$$

وزمرة المصفوفات النظامية A بحيث يكون

$$A^{tr} J_{2m} A = J_{2m}$$

تدعى بالزمرة المتعامدة الزوجية SP_{2m}.

---

[3] عندما نستخدم قاعدة لتعريف V في F^n، يصبح f على الشكل $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \ \cdots \ a_n).p.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

إذا كانت A مصفوفة لـ α مع الحفاظ على القاعدة، عندئذٍ α يقابل التطبيق $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

لذلك، تصبح (6) على الشكل

$$(a_1 \ \ldots \ a_n).A^{tr}.p.A.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 \ \cdots \ a_n).p.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in F^n$$

لاختبار هذه الحالات على قواعد قانونية لمتجهات لـ F^n، نرى بأنه يكافئ (7).

9.1 (a) يمكن أن يعاد ترتيب شروط الزمرة (G_2 و G_3) بـشروط أضـعف (يوجـد عنصر محايد من اليسار ومعكـوس مـن اليـسار): (G'_2) يوجـد e بحيـث يكـون $e * a = a$ لكـل a، (G'_3) لكـل $a \in G$، يوجـد $a' \in G$ بحيـث يكـون $a' * a = e$. لكي نبين بأن هذين الشرطين يكافئان (G_3) و (G_2)، ليكن $a \in G$، من G'_3 نجد أنه إذا كان a', a'' بحيث يكون $a' * a = e$ و $a'' * a' = e$. عندئذٍ

$$a * a' = e * (a * a') = (a'' * a') * (a * a')$$

$$= a'' * ((a' * a) * a') = a'' * a' = e,$$

وهذا يكافئ (G_3)، و

$$a = e * a = (a * a') * a = a * (a' * a) = a * e$$

وهذا يكافئ (G_2).

(b) يمكن أن تعرف الزمرة على أنها مجموعة G مع عمليـة ثنائيـة (*) بحيـث تتحقق الشروط الآتية: (g_1) * تجميعية، (g_2) G غير خاليـة، (g_3) لكـل $a \in G$، يوجد عنصر $a' \in G$ بحيث يكون $a' * a$ محايد الزمرة. كما يوجد عنـصر محايـد واحد على الأكثر في المجموعة مع العملية الثنائية التجميعيـة المعرفـة عليهـا، مـن الواضح أن هذه الشروط تكافئ الشروط التي في (a). توجد مجموعـة أصـغرية فـي الحالات التي يتحقق فيها شرطين من الشروط الثلاثة ، مثلاً، (+,) تحقق الـشرطين الأول والثاني، بينما لا تحقق الشرط الثالث، والمجموعة الخالية تحقـق الـشرطين الأول والثالث، ولا تحقق الشرط الثاني، ومجموعة المصفوفات من النوع 2×2 التي تأخـذ عواملها من حقل ما وتحقق $A * B = AB - BA$ تحقق الشرطين الثاني والثالث ولا تحقق الشرط الأول.

جدول الجداءات

إن العملية الثنائية على المجموعة المنتهية يمكن وصفها بالجدول الآتي من الجداءات

	e a b c …
e	e^2 ea eb ec …
a	ae a^2 ab ac …
b	be ba b^2 bc …
c	ce ca cb c^2 …
$\vdots$	

يكون e العنصر المحايد إذا وفقط إذا كان أول عمود و أول سطر من الجدول هو تكـرار لعناصر الزمرة. ويكون المعكوس موجوداً إذا وفقط إذا كان كل سطر وكل عمود تبادلي مـع عناصر الزمرة (انظر 1.2 (e)). إذا وجد n عنصراً، عندئذٍ لإثبات الخاصة التجميعية يجب أن نختار n^3 معادلة.

هذا يقترح لنا خوارزمية لإيجاد كل الزمر المعطاة برتبة منتهيـة n، وبالتحديـد، كـل الجداول الضربية المحتملة والتأكد من المسلمات. باستثناء الحالة التي يكون فيها n صـغيراً جداً، وهذا ليس موضوعياً! إن الجدول يحتوي على n^2 موضع، فإذا سمحنا لكل موضـع أن يثبت أي عنصر من العناصر n، عندئذٍ نحصل على n^{n^2} جدول محتمل قليل جداً التـي تعرف زمراً. مثلاً، يوجد

$$8^{64} = 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896$$

عملية ثنائية على مجموعة مكونة من 8 عناصر، لكن يوجد خمس صفوف متماثلة من الزمر من الرتبة 8 (4.12).

الزمر الجزئية (subgroups)

قضية 1 .10 لتكن S مجموعة جزئية وغير خالية من الزمرة G. إذا كان

S_1: $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$، و

S_2: $a \in S \Rightarrow a^{-1} \in S$

عندئذٍ فإن العملية المعرفة على G تحول S إلى زمرة.

البرهان. (S_1) إن العملية الثنائية المعرفة على G تعرّف العمليـة الثنائيـة $S \times S \to S$ على S، من الواضح أنها تجميعية. بفرض أن S تحوي على العنـصر a علـى الأقـل، معكوسه a^{-1}، والجداء $e = aa^{-1}$. وأخيراً من (S_2) نبين أن معكوس أي عنصر مـن S ينتمي إلى S.

تسمى المجموعة غير الخالية S التي تحقق (S_1) و (S_2) بالزمرة الجزئية في G. عندما تكون S منتهية فإن الشرط (S_1) يؤدي إلى الشرط (S_2): ليكن $a \in S$، عندئذٍ $\{a, a^2, \ldots\}$، ولذلك تكون رتبة a منتهية، ونقول بأن $a^n = e$، الآن إن $a^{-1} = a^{n-1} \in S$. إن المثال $(\;,+) \subset (\;,+)$ يبين بأن الشرط (S_1) لا يقتضي (S_2) عندما تكون S غير منتهية.

مثال11.1 إن مركز الزمرة G هي المجموعة الجزئية

$$Z(G) = \{g \in G:\ gx = xg,\ \forall x \in G\}$$

وهي زمرة جزئية من G.

قضية12.1 إن تقاطع الزمر الجزئية في G هو زمرة جزئية في G.

البرهان. بما أن المجموعة غير خالية لأنها تحوي على العنصر المحايد e، ومن الواضح أن الشرطين (S_1) و (S_2) محققان.

ملاحظة 13.1 في الحالة العامة يكون تقاطع الموضوعات الجزئية من موضوع جبري هو موضوعة جزئية. مثلاً تقاطع الحلقات الجزئية هو حلقة جزئية، وتقاطع المودولات الجزئية هو مودول جزئي، وهكذا.

قضية 14.1 لكل مجموعة جزئية X من زمرة G، توجد زمرة جزئية أصغرية في G تحوي X. وتتكون من جميع الجداءات المنتهية لعناصر من X ومعكوساتها (مع السماح بالتكرار).

البرهان. لتكن S تقاطع جميع الزمر الجزئية في G الحاوية على X وبالتالي فإنها زمرة جزئية في G وتحوي X، من الواضح بأنها أصغر زمرة جزئية في G تحوي X. ومن الواضح أيضاً بأنها تحوي على جميع الجداءات لعناصر من X ومعكوسات هذه العناصر. لكن إن مجموعة هذه الجداءات تحقق الشرطين (S_1) و (S_2) وبالتالي فهي زمرة جزئية في G تحوي X. ولذلك فهي تساوي S.

نرمز للزمرة الجزئية S المعطاة في القضية السابقة بالرمز $\langle X \rangle$، وتسمى بالزمرة الجزئية المولدة بالمجموعة X. مثلاً، $\langle f \rangle = \{e\}$. إذا كانت رتبة كل عنصر في X منتهية، مثلاً إذا كانت G منتهية، عندئذٍ مجموعة كل الجداءات المنتهية من عناصر X تشكل زمرة وتساوي $\langle X \rangle$.

نقول بأن X تولد G إذا كان $G = \langle X \rangle$، أي أن، كل عنصر في G يكتب على شكل جداء منته لعناصر من X ومعكوساتها. نلاحظ بأن رتبة العنصر a من الزمرة يساوي رتبة الزمرة الجزئية $\langle a \rangle$ المولدة به.

أمثلة

1. 15 الزمر الدائرية. يقال بأن الزمرة دائرية إذا كانت مولدة بعنصر واحد من عناصرها، أي أنه، إذا كانت $G = \langle r \rangle$ لبعض العناصر $r \in G$. إذا كانت رتبة r منتهية وتساوي n، عندئذٍ

$$G = \{e, r, r^2, \dots, r^n\} \approx C_n, \ r^i \leftrightarrow i \mod n$$

ويمكن أن نتصور بأن G عبارة عن تناظرات دورانية حول مركز مضلع منتظم مؤلف من n - ضلع. إذا كانت رتبة r غير منتهية، عندئذٍ

$$. G = \{\dots, r^{-i}, \dots, r^{-1}, e, r, \dots, r^i, \dots\} \approx C_\infty, \ r^i \leftrightarrow i$$

وبهذا، حتى التماثل ، يوجد تماماً زمرة دائرية من الرتبة n لكل $n \le \infty$. سنستخدم مستقبلاً الرمز C_n لأي زمرة دائرية من الرتبة n (ليس بالضرورة $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}$).

1 .16 زمر ديهيدرال[4] D_n. لكل $n \ge 3$، D_n هي زمرة التناظرات لمضلع منتظم مؤلف من n - ضلع[5] . عدد رؤوسه n ... ,1.2مرقمة بعكس اتجاه عقارب الساعة. ليكن r الدوران بزاوية تساوي $2p/n$ (لذلك $i \mapsto i + 1 \mod n$)، وليكن s انعكاس للمحور (= دوران حول المحور) من الرأس 1 إلى مركز المضلع (لذلك يكون $i \mapsto i + 2 - i \mod n$). عندئذٍ

$$r^n = 1; \ \ s^2 = 1; \ \ srs = r^{-1} \ \ (\Rightarrow sr = r^{n-1}s)$$

تقتضي هذه المعادلات ما يلي

$$D_n = \{e, r, \dots, r^{n-1}, s, rs, \dots, r^{n-1}s\}$$

يكون واضحاً، من الهندسة، أن عناصر هذه المجموعة تكون مختلفة، ولذلك $|D_n| = 2n$.

---

[4] نرمز لهذه الزمرة بالرمز D_n أو بالرمز D_{2n} معتمداً على المؤلف (كالزمرة التناظرية بـ n ضلع) أو مجرداً.

[5] "بشكل أساسي" D_n يمكن أن تعرّف على أنها زمرة جزئية من S_n مولدة بـ $r: i \mapsto i+1 (\mod n)$ و $s: i \mapsto n+2-1 (\mod n)$. عندئذٍ كل الحالات المتعلقة بـ D_n يمكن أن تبرهن بدون الرجوع إلى الهندسة (أو توضيح للقارئ).

ليكن t انعكاساً للمحور المار من منتصف الضلع الواصل بين الرأسين 1 و 2 ومركز المضلع (لذلك $i \mapsto i+3-i \bmod n$). عندئذٍ $r = ts$. وبالتالي فإن $D_n = \langle s,t \rangle$ ويكون

$$s^2 = e,\ t^2 = e,\ (ts)^2 = e = (st)^2$$

نعرف D_1 ليكون $C_2 = \{1, r\}$ ونعرّف D_2 ليكون $C_2 \times C_2 = \{1, r, s, rs\}$. تسمى الزمرة D_2 أيضاً بزمرة كلاين، أو 4- زمرة. نلاحظ بأن D_3 هي زمرة كل تبديلات المجموعة $\{1,2,3\}$. وهي أصغر زمرة غير تبديلية.

17.1 الزمرة الرباعية Q . لتكن $a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ و $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. عندئذٍ

$a^4 = 1,\ \ a^2 = b^2,\ \ bab^{-1} = a^3$ ومنه $(ba = a^3b)$.

إن الزمرة الجزئية من $GL_2(C)$ المولدة بالعنصرين a و b هي

$$Q = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$$

ويمكن أن توصف الزمرة Q على أنها المجموعة الجزئية $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ من الجبر الرباعي H . نتذكر بأن $H = R_1 \oplus R_i \oplus R_j \oplus R_k$ مع الجداءات المعرفة كما يلي

$$i^2 = -1 = j^2,\ \ ij = k = -ji$$

يتمدد التطبيق $i \mapsto a,\ j \mapsto b$ بشكل وحيد إلى التشاكل $H \to M_2(C)$ في R – جبور، بحيث تكون تطبيقات الزمرة $\langle i, j \rangle$ متماثلة مع $\langle a, b \rangle$.

18.1 نتذكر بأن S_n هي زمرة التبديلات على المجموعة $\{1,2, \ldots n\}$. إن المناقلة عبارة عن تبديلة يظهر فيها عنصران أما بقية العناصر فهي ثابتة. بسهولة نجد أن S_n مولدة بمناقلاتها (انظر (4.25) فيما يلي يتضح المعنى بدقة أكثر)

زمر برتب صغيرة (Groups of small order)

كل زمرة من رتبة أصغر من 16 تكون متماثلة تماماً مع إحدى الزمر التي في القائمة الآتية:

الرتبة	1	2	3	4	5	6	7	8
الزمرة	C_1	C_2	C_3	C_4, D_2	C_5	C_6, S_3	C_7	5 زمرة
الرتبة	9	10	11	12	13	14	15	16
الزمرة	$C_9, C_3 \times C_3$	C_{10}, D_5	C_{11}	5 زمرة	C_{13}	C_{14}, D_7	C_{15}	14 زمرة

الرتبة 8: $C_8 \,,\; C_2 \times C_4 \,,\; C_2 \times C_2 \times C_2 \,,\; Q \,,\; D_4$

الرتبة 12: $C_{12} \,,\; C_2 \times C_6 \,,\; C_2 \times S_3 \,, A_4 \,,\; C_3 \times_j C_4$

لكل عدد أولي p ، توجد زمرة واحدة فقط (تحت سقف التماثل)، وهي بالتحديد، C_p (انظر 1.27)، وزمرتان فقط من الرتبة p^2 ، وهما بالتحديد، $C_p \times C_p$ و C_{p^2} (انظر 4.18).

لتصنيف الزمر من الرتبة 6، (انظر 4.23)، ومن أجل الرتبة 8، (انظر 4.21)، ومن أجل الرتبة 12، (انظر 5.16)، وبالنسبة للرتب 10، 14 و 15، (انظر 5.14).

نجد بصعوبة، بأن القوى الأكثر كبراً للأعداد الأولية التي تقسم n ، ستتشكل لدينا زمراً أكثر من الرتبة n . في الحقيقة، إذا كان $f(n)$ عدد الصفوف المتماثلة من الزمر ذي الرتبة n ، عندئذٍ

$$f\ (n) \le n^{\left(\frac{2}{27}+o(1)\right)e(n)^2}$$

حيث $e(n)$. الأس الأكبر العدد الأولي القاسم لـ n و $o(1) \to 0$ كما أن $e(n) \to \infty$ (انظر Pyber 1993).

في 2001، وجدت قائمة كاملة وفائضة من الزمر من الرتب أصغر أو تساوي 2000 – تحت سقف التماثل، ويوجد تماماً 49,910,529,484 (Besche et al. 2001).

التشاكلات (Homomorphisms)

تعريف 19.1 إن التشاكل من الزمرة G إلى زمرة ثانية G' هو تطبيق $a : G \to G'$ ، بحيث يكون $a\ (ab) = a\ (a)a\ (b)$ ، لكل $a, b \in G$. والتماثل هو تشاكل تقابل.

مثلاً، التطبيق المحدد $\det : \mathrm{GL}_n\,(F) \to F^X$ هو تشاكل.

20.1 ليكن a تشاكلاً ما لكل عنصر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من G ،

$$a\ (a_1 a_2 \ldots a_m) = a\ (a_1(a_2 \ldots a_m)) = a\ (a_1)a\ (a_2 \ldots a_m) = \ldots$$
$$= a\ (a_1) \ldots a\ (a_m)$$

وبشكل خاص، لكل $m \ge 1$ ،

$$a\left(a^{m}\right)=a\left(a\right)^{m} \qquad (8)$$

بالإضافة إلى ذلك $a\left(e\right)=a\left(ee\right)=a\left(e\right)a\left(e\right)$، ومنه $a\left(e\right)=e$ (بتطبيق a) 1.2).

وأيضاً

$$aa^{-1}=e=a^{-1}a\Rightarrow a\left(a\right)a\left(a^{-1}\right)=e=a\left(a^{-1}\right)a\left(a\right)$$

وبهذا يكون $a\left(a^{-1}\right)=a\left(a\right)^{-1}$. وبالتالي تكون(8) محققة لكل $m\in\mathbb{Z}$. لذلك، فإن تشاكلات الزمر التبديلية تكون أيضاً تشاكلات Z- مودول.

كما لاحظنا سابقاً، كل سطر من الجداءات في جدول الزمر يشكل تبديلة لعناصر الزمرة. ومثال على ذلك زمرة كايلي، وهذه تسمح لزمرة واحدة لتتحول إلى زمرة تبديلات.

مبرهنة 21.1 (كايلي) يوجد تشاكل متباين قانوني من الشكل

$$a:G\rightarrow \mathrm{Sym}\left(G\right)$$

البرهان. لكل $a\in G$، نعرّف $a_{L}:G\rightarrow G$ بالعلاقة $x\mapsto ax$ (بالضرب من اليسار بـ a). لكل $x\in G$،

$$\left(a_{L}\circ b_{L}\right)(x)=a_{L}\left(b_{L}(x)\right)=a_{L}\left(bx\right)=ab(x)=\left(ab\right)_{L}(x)$$

ومنه $\left(ab\right)_{L}=a_{L}\circ b_{L}$. كما أن $e_{L}=id$ وبالتالي

$$a_{L}\circ\left(a'\right)_{L}=id=\left(a'\right)_{L}\circ a_{L}$$

وبالتالي يكون a_{L} تقابلاً، أي أن، $a_{L}\in\mathrm{Sym}\left(G\right)$. عندئذٍ فإن $a\mapsto a_{L}$ تشاكل $G\rightarrow\mathrm{Sym}\left(G\right)$، وهو متباين وذلك حسب قانون الحذف.

نتيجة 22.1 كل زمرة منتهية من رتبة n يمكن أن تصبح زمرة جزئية من S_{n}.

لسوء الحظ، إن S_{n} كبيرة جداً بأن نتعامل معها، باستثناء الحالة التي يكون فيها n صغيراً. سنرى فيما بعد (4.22) بأن G ستكون غالباً مغمورة في زمرة التبديلات برتبة أصغر بكثير من $n!$.

المجموعات المرافقة (Cosets)

لتكن S زمرة جزئية من الزمرة G، وليكن

$$aS=\left\{as,\ s\in S\right\}$$

$$Sa=\left\{sa,\ s\in S\right\}$$

بما أن الخاصة التجميعية محققة، يكون، $a\left(bS\right)=\left(ab\right)S$، ويمكن أن نرمز لها بالرمز abS.

إذا كانت H زمرة جزئية من الزمرة G، تسمى المجموعات التي من الشكل aH بالمرافقات اليسارية لـ H في G، و تسمى المجموعات التي تكون من الشكل Ha بالمرافقات اليمينية لـ H في G. وبما أن $e \in H$، فإن، $aH = H$ إذا وفقط إذا كان $a \in H$.

مثال 23.1 لتكن $G = \left(\ ^{2}, + \right)$، وليكن H فضاءً جزئياً بعده 1 (المستقيم مار من مبدأ الإحداثيات). عندئذٍ المرافقات (اليسارية و اليمينية) لـ H عبارة عن مستقيمات موازية لـ H.

قضية 24.1 لتكن H زمرة جزئية من الزمرة G.

a) أي عنصر $a \in G$ يقع في المرافقة اليسارية C لـ H إذا وفقط إذا كان $C = aH$.

b) المرافقتان اليساريتان إما أن تكونا منفصلتين أو متساويتين.

c) $aH = bH$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$.

d) أي مرافقتين يساريتين تحتويان على نفس العدد من العناصر (من الممكن أن تكونا غير منتهيتين).

البرهان. (a) من المؤكد من أن $a \in aH$. العكس، إذا كان a يقع في المرافقة اليسارية bH، عندئذٍ يكون $a = bh$ لبعض العناصر مثل h، ولهذا

$$aH = bhH = bH$$

(b) إذا كان C و C' غير منفصلتين، عندئذٍ تحويان على عنصر مشترك a، ويكون $C = aH$ و $C' = aH$ وذلك من (a).

(c) إذا كان $a^{-1}b \in H$، عندئذٍ $H = a^{-1}bH$، ومنه يكون $aH = aa^{-1}bH = bH$. وبالعكس، إذا كان $aH = bH$، عندئذٍ يكون $H = a^{-1}bH$، ومنه $a^{-1}b \in H$.

(d) التطبيق $ah \mapsto bh : \left(ba^{-1}\right)_L$ تقابل $aH \to bH$.

إن الدليل (index) $(G : H)$ للزمرة H في G هو عدد المرافقات اليسارية لـ H في G [6].

مثلاً، $(G : 1)$ هي رتبة الزمرة G.

---

[6] أكثر توضيحاً، إن $(G : H)$ هي قدرة المجموعة $\{aH \,,\; a \in G\}$.

إن المرافقات اليسارية للزمرة H في G .تشكل تغطية لـــ G، (24.1 b) تبـــين بأنـــه يشكل تجزئة لـــ G. وبكلمات أخرى، الشرطان a و b يقعان في نفس المرافقـــة اليـــسارية التي تشكل علاقة تكافؤ على G.

مبرهنة (25.1) (لاغرانج) لتكن G زمرة منتهية، عندئذٍ

$$(G:1)=(G:H)(H:1)$$

بشكل خاص، رتبة كل زمرة جزئية منتهية تقسم رتبة الزمرة .

البرهان. المرافقات اليسارية لـــ H في G تشكل تجزئة لـــ G. يوجد $(G:H)$مرافقة، وكل منها تحوي على $(H:1)$ عنصر.

نتيجة (26.1) رتبة كل عنصر من زمرة منتهية تقسم رتبة الزمرة.

البرهان. بتطبيق مبرهنة لاغرانج على $H=\langle g\rangle$، ومن $(H:1)=o(g)$.

مثال 27.1 لتكن G من الرتبة p، p عدد أولي، عندئذٍ كل عنصر يكون من الرتبة 1 أو من الرتبة p. لكن e هو العنصر الوحيد من الرتبة 1، ولذلك فإن G مولدة بأي عنـــصر $a\neq e$. وبشكل خاص، تكون G دائرية، وبالتالي $G\approx C_p$. هذا يبين بأنه، على ســـبيل المثال، وتحت سقف التماثل، توجد زمرة واحدة فقط من الرتبة 1,000,000,007و(لأن العدد أولي). في الحقيقة توجد زمرتـــان مـــن الرتبـــة 1,000,000,014,000,000,049 (انظـــر 18.4).

28.1 يوجد تطبيق تقابل بين مجموعة المرافقات اليسارية و مجموعة المرافقـــات اليمينيـــة، $aH\leftrightarrow Ha^{-1}$. وبالتالي فإن $(G:H)$ هو عدد المرافقات اليمينية لـــ H في G. لكن، في الحالة العامة، إن المرافقة اليمينية لن تساوي المرافقة اليسارية.(انظر 33.1).

29.1 يوجد لمبرهنة لاغرانج معكوس جزئي وهو: ليكن p عدداً أولياً يقسم رتبة G، حيث $m=(G:1)$، عندئذٍ فإن G تحوي على عنصر من الرتبة p (مبرهنة كوشـــي 13.4)، إذا كان p^n قوى لعدد أولي ويقسم m، $m=(G:1)$، عندئذٍ تحـــوي G علـــى زمـــرة جزئية من الرتبة p^n (مبرهنة سيلو 2.5). نلاحظ أن 4- زمرة $C_2\times C_2$ من الرتبـــة 4، لكن لا تحوي على عنصر من الرتبة 4، وأن الزمرة A_4 من الرتبة 12، ولكـــن لا تحـــوي على زمرة جزئية من الرتبة 6 (انظر التمرين 13.4).

وبالتعميم، يكون لدينا النتيجة الآتية.

قضية 30.1 لأي زمرتين جزئيتين $K\supset H$ من G، يكون

$$(G:K) = (G:H)(H:K)$$

(نعني بذلك أنه، إما كلتاهما غير منتهيتين أو تكونان منتهيتان ومتساويتان).

البرهان. نكتب $G = \mathbf{C}_{i\in I} g_i H$ (الاجتماع منفصل)، و $H = \mathbf{C}_{j\in J} h_i K$ (الاجتماع منفصل). بضرب المساواة الثانية بالعدد g_i، نجد بأن $g_i H = \mathbf{C}_{j\in J} g_i h_i K$ (الاجتماع منفصل)، و بهذا يكون $G = \mathbf{C}_{i,j\in I\times J} g_i h_i K$ (الاجتماع منفصل).وهذا يبين بأن

$$(G:K) = |I||J| = (G:H)(H:K)$$

الزمر الجزئية الناظمية (Normal subgroups)

لتكن S و T مجموعتين جزئيتين من الزمرة G، وليكن

$$ST = \{st\,,\ \ s\in S\,,\ t\in T\}.$$

بما أن الخاصة التجميعية محققة، يكون $R(S\,T) = (R\,S)T$، وبالتالي يمكن أن نرمز لهذه المجموعة بالرمز $R\,S\,T$.

تكون الزمرة الجزئية N ناظمية في G، ونرمز لها بالرمز $N \lhd G$، إذا كان $gNg^{-1} = N$ لكل $g\in G$.

ملاحظة 1.31 لكي نبين بأن N ناظمية في G، يكفي أن نبرهن بأن $gNg^{-1}\subset N$ لكل $g\in G$، لأنه بضرب هذا الاحتواء من اليسار ومن اليمين بالعنصر g^{-1} و g على الترتيب نحصل على الاحتواء $N\subset gNg^{-1}$، ونعيد هذه الكتابة مع g^{-1} لكل g يعطي بأن $N\subset gNg^{-1}$ لكل g. المثال الآتي يبين بأنه يمكن أن يوجد زمرة جزئية N من الزمرة G و $ag\in G$، بحيث يكون $gNg^{-1}\subset N$ لكن $gNg^{-1}\neq N$.

مثال 32.1 لتكن $G = GL_2(Q)$، ولتكن $H = \left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ n\in Z\right\}$، عندئذٍ فإن Hزمرة جزئية من G، في الحقيقة إن $H \quad Z$. لتكن $g = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. عندئذٍ

$$g\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix}5 & 5n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 5n\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

وبالتالي $gHg^{-1} \underset{\neq}{\subset} H$.

قضية 33.1 تكون الزمرة الجزئية N ناظمية في G إذا وفقط إذا كانت كل مرافقة يسارية هي مرافقة يمينية أيضاً، في هذه الحالة، $gN = Ng$ لكل $g \in G$.

البرهان. واضح أن

$$gNg^{-1} = N \Leftrightarrow gN = Ng$$

لهذا، إذا كانت N ناظمية، عندئذٍ كل مرافقة يسارية هي مرافقة يمينية (في الحقيقة، $gN = Ng$). وبالعكس، إذا كانت المرافقة اليسارية gN هي مرافقة يمينية أيضاً، عندئذٍ يجب أنت تكون المرافقة اليمينية Ng من (a 1.24). وبالتالي $gN = Ng$، ولذلك $gNg^{-1} = N$.

34.1 تنص القضية على أنه، لكي تكون N ناظمية، يجب أن يكون لدينا من أجل كل $g \in G$ و $n \in N$، العنصر n' بحيث يكون $gn = n'g$ (وبشكل مكافئ، لكل $g \in G$ و $n \in N$، يوجد n' بحيث يكون $ng = gn'$). وبعبارة أخرى، لكي نقول بأن N ناظمية هذا يكافئ القول بأن كل عنصر من G يمكنه أن يتحرك ليغير موضعه ليؤثر على عنصر من N ليستبدل بعنصر آخر من N.

مثال 35.1 (a) كل زمرة جزئية دليلها يساوي 2 تكون ناظمية. وبالفعل، لتكن $g \in G$، $g \notin H$. عندئذٍ $gH \complement H = G$ (الاجتماع منفصل). وبالتالي فإن gH متمم H في G. وبنفس الترتيب يبين لنا بأن Hg متمم H في G، وبالتالي يكون $gH = Hg$.

(b) نعتبر أن زمرة ديهيدرال هي على الشكل $D_n = \{e, r, \ldots r^{n-1}, s, \ldots, r^{n-1}s\}$. عندئذٍ فإن دليل $C_n = \{e, r, \ldots, r^{n-1}\}$ يساوي 2، وبالتالي فهي ناظمية. لكل $n \geq 3$ الزمرة الجزئية $\{e, s\}$ ليست ناظمية لأن $r^{-1}sr = r^{n-2}s \notin \{e, s\}$.

(c) كل زمرة جزئية في زمرة تبديلية تكون ناظمية (واضح)، لكن العكس ليس صحيحاً: الزمرة الرباعية Q ليست تبديلية، لكن كل زمرة جزئية فيها تكون ناظمية (انظر التمرين 1.1).

نقول أن الزمرة G بسيطة إذا لم تحو زمراً جزئية ناظمية باستثناء G و $\{e\}$. معظم الزمر يمكنها أن تحوي على كثير من الزمر الجزئية الناظمية – في الحقيقة، مبرهنات سيلو (§5) تطبق على كل زمرة منتهية تحوي على زمر جزئية غير تافهة ماعدا الزمر الدائرية برتب أولية.

قضية 36.1 لتكن H و N زمرتين جزئيتين من G و N ناظمية، عندئذٍ HN زمرة جزئية في G. وإذا كانت H ناظمية عندئذٍ فإن HN زمرة جزئية ناظمية في G.

البرهان. إن المجموعة HN ليست خالية، و

$$(hn)(h'n') \overset{34.1}{=} hh'n''n' \in HN$$

وبالتالي تكون مغلقة بالنسبة لعملية الضرب. بما أن

$$(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} \overset{34.1}{=} h^{-1}n' \in HN$$

وهي أيضاً مغلقة بالنسبة لتركيب النظائر، وبالتالي فإن HN زمرة جزئية. عندئذٍ

$$gHNg^{-1} = gHg^{-1}.gNg^{-1} = HN,$$

لكل $g \in G$.

إن تقاطع الزمر الجزئية الناظمية هو أيضاً زمرة جزئية ناظمية (cf 13.1). لذلك، يمكننا أن نعرّف زمرة جزئية ناظمية مولدة بالمجموعة X في الزمرة G لتكون تقاطع الزمر الجزئية الناظمية الحاوية على X. وتكون على شكل حدود من X وهي معقدة قليلاً. نقول بأن المجموعة الجزئية X من الزمرة G ناظمية إذا كان $gXg^{-1} \subset X$ لكل $g \in G$.

تمهيدية 37.1 إذا كانت X ناظمية، عندئذٍ الزمرة الجزئية $\langle X \rangle$ المولدة بها تكون ناظمية.

البرهان. إن تطبيق "الترافق مع g"، $a \mapsto gag^{-1}$، عبارة عن تشاكل $G \to G$. إذا كان $a \in \langle X \rangle$، نقول بأن، $a = x_1 \dots x_m$ مع كل x_i أو معكوسها في X، عندئذٍ

$$gag^{-1} = (gx_1g^{-1})\dots(gx_mg^{-1}) \in \langle X \rangle$$

تمهيدية 38.1 لأي مجموعة جزئية X في G، المجموعة الجزئية $\bigcup_{g\in G} gXg^{-1}$ ناظمية، وهي أصغر مجموعة ناظمية تحوي على X.

البرهان. واضح.

بجمع التمهيديات السابقة، نحصل على القضية الآتية.

قضية 39.1 الزمرة الجزئية الناظمية المولدة بالمجموعة الجزئية X في G هي $\langle \bigcup_{g\in G} gXg^{-1} \rangle$.

النواة وزمر القسمة (Kernels and quotients)

إن نواة التشاكل $\alpha : G \to G'$ هي

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \{ g \in G \mid \alpha(g) = e \}$$

إذا كان a متبايناً، عندئذٍ $\operatorname{Ker}(a)=\{e\}$. العكس، إذا كان $\operatorname{Ker}(a)=\{e\}$، فـإن a متباين، لأن

$$a(g)=a(g')\Rightarrow a\left(g^{-1}g'\right)=e\Rightarrow g^{-1}g'=e\Rightarrow g=g'$$

قضية 40.1 نواة أي تشاكل هي زمرة جزئية ناظمية.

البرهان. من الواضح أنها زمرة جزئية، وإذا كان $a\in\operatorname{Ker}(a)$، لذلك فإن $a(a)=e$، و $g\in G$، عندئذٍ

$$a\left(gag^{-1}\right)=a(g)a(a)a(g)^{-1}=a(g)a(g)^{-1}=e$$

وبالتالي $gag^{-1}\in\operatorname{Ker}(a)$.

مثلاً، إن نواة التشاكل $\det:\mathrm{GL}_n(F)\to F^X$ هي زمرة من المصفوفات من النــوع $n\times n$ والتي محددها يساوي 1 ــ تسمى هذه الزمرة $\mathrm{GL}_n(F)$ بالزمرة الخطية الخاصــة من الدرجة n.

قضية 41.1 كل زمرة جزئية ناظمية هي نواة لتشاكل زمري. وبتفصيل أكثر، إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G، عندئذٍ توجد زمرة وحيدة تبنى على المجموعة G/N والمؤلفة من مرافقات N في G بحيث $a\mapsto aN:G\to G/N$ يكون تشاكل زمري.

البرهان. نكتب المرافقات كمرافقات يسارية، ونعــرف $(aN)(bN)=(ab)N$. علينـــا أن نبرهن (i) إنه معرف جيداً، و (ii) يعطي زمرة تبنى على مجموعة المرافقات. وعندئذٍ يكون من الواضح أن التطبيق $g\mapsto gN$ تشاكل نواته N.

(i) لتكن $aN=a'N$ و $bN=b'N$، علينا أن نبين بــأن $abN=a'b'N$. لكن

$$abN=a(bN)=a(b')N\overset{33.1}{=}aNb'=a'Nb'\overset{33.1}{=}a'b'N$$

(ii) إن الجداء تجميعي بالتأكيد، المرافق N هو العنصر الحيادي، و $a^{-1}N$ هــو معكوس aN.

42.1 إن الزمــرة G/N تــسمى بزمــرة القــسمة[7] لــــ G علــى N. التطبيــق $a\mapsto aN:G\to G/N$ يتمتع بالخاصة العامة الآتية: لأي تشاكل $a:G\to G'$ مــن الزمر بحيث يكون $a(N)=\{e\}$، يوجد تشاكل وحيد $G/N\to G'$ بحيث يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

[7] تسمى عند بعض المؤلفين بـــ " زمرة الخارج" بدلاً من "زمرة القسمة".

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "a \mapsto aN"] \arrow[dr, "a"'] & G/N \arrow[d, dotted] \\ & G` \end{tikzcd}$$

لتبيان ذلك، نلاحظ بأنه لكل $a(gn) = a(g)a(n) = a(g)$ ، $n \in N$، ولذلك فـــإن a ثابتة على كل مرافقة يسارية gN لـــ N في G. ولذلك نعرّف التطبيق

$$\bar{a} : G/N \to G',\ \bar{a}(gN) = a(g)$$

و $\bar{a}$ تشاكل لأن

$$\bar{a}((gN)(g'N)) = \bar{a}(gg'N) = a(gg') = a(g)a(g') = \bar{a}(gN)\bar{a}(g'N)$$

إن وحدانية $\bar{a}$ تتضح من أن $G \to G/N$ غامر.

مثال 43.1 (a) نعتبر الزمرة الجزئية $m\mathbb{Z}$ في $\mathbb{Z}$. وزمرة القسمة $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ زمرة دائريـــة من الرتبة m.

(b) ليكن L مستقيماً ماراً من مبدأ الإحداثيات في ^{2} . عندئذٍ فإن $^2/L$ يتماثل مع (لأنه فضاء متجهي على ذو البعد واحد)

(c) لكل $n \geq 2$، زمرة القسمة $D_n/\langle r \rangle = \{\bar{e}, \bar{s}\}$ (زمرة دائرية من الرتبة 2).

حول مبرهنات التماثل (Theorems concerning homomorphisms)

المبرهنات في هذا المقطع الجزئي تسمى أحياناً بمبرهنات التماثل (الأولى ، الثانية، ...).

تحليل التشاكلات إلى عوامل

نتذكر بأن صورة التطبيق $a : S \to T$ هي $a(S) = \{a(s),\ s \in S\}$.

مبرهنة 44.1 (المبرهنة الأساسية لتشاكلات الزمر) لأي تشاكل $a : G \to G'$ من الزمر، تكون النواة N زمرة جزئية ناظمية في G، الصورة I لـــ a هي زمرة جزئية في G'،
إن a يتحلل بالحالة الطبيعية إلى تطبيق
غامر، وتماثل، وتطبيق متباين:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "a"] \arrow[d, "g \,\mapsto\, gN"', "\text{غامر}"] & G' \arrow[d, "\text{متباين}"] \\
G/N \arrow[r, "gN \,\mapsto\, a(g)", "\text{تماثل}"'] & \mathrm{I}
\end{tikzcd}$$

البرهــان. لقد رأينا في (40.1) أن النواة هي زمــرة جزئيــة ناظميــة فــي G. إذا كــان $b = a(a)$ و $b' = a(a')$، عندئــــذٍ $bb' = a(aa')$، و $b^{-1} = a\left(a^{-1}\right)$، ولــــذلك $I \overset{\text{def}}{=} a(G)$ يكون زمرة جزئية في G'. تبين الخاصة العامة لزمرة القسمة (42.1) أن التطبيق $x \mapsto a(x): G \to I$ يعــرّف التــشاكل $\overline{a}: G/N \to I$ بالعلاقة $\overline{a}(gN) = a(g)$.

إن هذا التشاكل غامر، وإذا كان $\overline{a}(gN) = e$، عندئذٍ فإن $g \in \operatorname{Ker}(a) = N$، ومنه فإن نواة $\overline{a}$ تافهة. وبالتالي فإن التشاكل متباين.

مبرهنة التماثل

مبرهنة 45.1 (مبرهنة التماثل) لتكن H و N زمرتين جزئيتين من G و N ناظميــة. عندئذٍ HN زمرة جزئية في G، $H \cap N$ زمرة جزئية ناظمية في H، وإن التطبيق

$$h(H \cap N) \mapsto hN : H/H \cap N \to HN/N$$

تماثل.

البرهان. لقد رأينا في (36.1) أن HN زمرة جزئية. لنأخذ التطبيق

$$H \to G/N, \quad h \mapsto hN$$

إن هذا التطبيق عبارة عن تشاكل، نواته $H \cap N$، والتي هي ناظمية في H. من المبرهنة 44.1، ومن التطبيق ينتج لدينا التماثل $H/H \cap N \to I$ حيث I صورة التطبيق. لكــن I مجموعة المرافقات التي لها الشكل hN مع $h \in H$، أي أن، $I = HN/N$.

مبرهنة التقابل

تبين المبرهنة الآتية أنه إذا كانت $\overline{G}$ زمرة القسمة لــ G، عندئذٍ فإن شــبكة مــن الزمــر الجزئية في $\overline{G}$ تتحكم ببنية شبكة الزمر الجزئية لــ G التي تقــع علــى نــواة التطبيــق $G \to \overline{G}$.

مبرهنة 46.1 (مبرهنة التقابل) لتكن $\alpha : G \to \overline{G}$ تشاكل زمري غامر، وليكن $N = \operatorname{Ker}(\alpha)$. عندئذٍ يوجد تطبيق تقابل

$$\{\text{الزمر الجزئية من } G \text{ والحاوية على } N\} \leftrightarrow \{\text{الزمر الجزئية من } \overline{G}\}$$

بالنسبة للزمرة الجزئية H الحاوية على N فهي تقابل $\overline{H} = \alpha(H)$ والزمرة الجزئية $\overline{H}$ في $\overline{G}$ فهي تقابل $H = \alpha^{-1}(\overline{H})$. وبالإضافة لذلك، إذا كان $H \leftrightarrow \overline{H}$ و $H' \leftrightarrow \overline{H'}$، عندئذٍ

(a) $H \subset H' \Leftrightarrow \overline{H} \subset \overline{H'}$، في الحالة التي يكون فيها $(H' : H) = (\overline{H'} : \overline{H})$

(b) تكون $\overline{H}$ زمرة جزئية ناظمية في $\overline{G}$ إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G، وفي هذه الحالة ينتج لدينا التماثل

$$G/H \to \overline{G}/\overline{H}$$

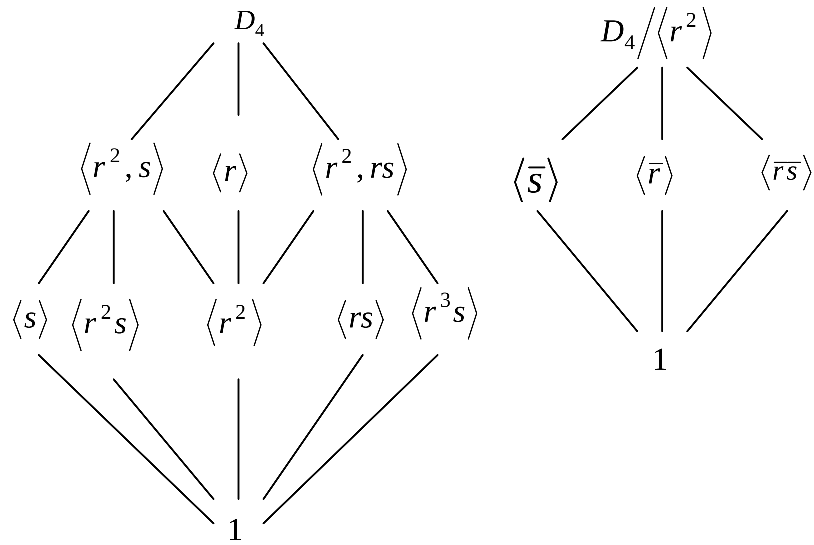
البرهان. إذا كانت $\overline{H}$ زمرة جزئية في $\overline{G}$، عندئذٍ من السهولة رؤية بأن $\alpha^{-1}(\overline{H})$ زمرة جزئية في G وتحوي N، وإذا كانت H زمرة جزئية في G، عندئذٍ فإن $\alpha(H)$ زمرة جزئية في $\overline{G}$ (انظر 44.1). من الواضح، $\alpha\alpha^{-1}(H) = HN$، والتي تساوي H إذا وفقط إذا كان $H \supset N$، و $\alpha\alpha^{-1}(\overline{H}) = \overline{H}$. لذلك، فإن العمليتين تعطيان التطبيق التقابل المطلوب. أما الحالات الباقية فمن السهل برهانها. مثلاً، التحليل لـ $H' = \bigcup_{i \in I} a_i H$ إلى اجتماع منفصل من المرافقات اليسارية لـ H يعطينا تحليلاً مشابهاً $\overline{H}' = \bigcup_{i \in I} a_i \overline{H}$ لـ $\overline{H'}$.

نتيجة 47.1 لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، عندئذٍ يوجد تطبيق تقابل بين مجموعة الزمر الجزئية في G والحاوية على N ومجموعة الزمر الجزئية في G/N، $H \leftrightarrow H/N$، علاوةً على ذلك، تكون H زمرة جزئية ناظمية في G إذا وفقط إذا كانت H/N زمرة جزئية ناظمية في G/N، G، وفي هذه الحالة ينتج لدينا التماثل

$$G/H \to (G/N)/(H/N)$$

البرهان. هذه الحالة الخاصة من المبرهنة التي يكون فيها α هو التطبيق $g \mapsto gN : G \to G/N$.

مثال 48.1 لتكن $G = D_4$ ولتكن N زمرتها الجزئية $\langle r^2 \rangle$. بالرجوع إلى (16.1) نجد أن $srs^{-1} = r^3$، ولذلك $sr^2s^{-1} = (r^3)^2 = r^2$. لذلك فإن N ناظمية. إن الزمرتين G و G/N لهما الشبكة الآتية من الزمر الجزئية



الجداءات المباشرة (Direct product)

لتكن G زمرة، ولتكن $H_1, H_2, \dots, H_k$ زمراً جزئية من G. نقول بأن G هي جـــداء مباشر للزمر الجزئية H_i إذا كان التطبيق

$$(h_1, h_2, \dots, h_k) \mapsto h_1 h_2 \dots h_k : H_1 \times H_2 \times \dots \times H_k \to G$$

تماثلاً من الزمر. هذا يعني أن كل عنصر g من G يمكن أن يكتب وبشكل وحيد بالـــشكل $g = h_1 h_2 \dots h_k,\ h_i \in H_i$، وإذا كـــــان $g = h_1 h_2 \dots h_k$ و $g' = h_1' h_2' \dots h_k'$، عندئذٍ

$$gg' = (h_1 h_1')(h_2 h_2')\dots(h_k h_k').$$

إن القضايا الآتية تعطينا قاعدة لكي تكون الزمرة جداءً مباشراً لزمرها الجزئية.

قضية 49.1 تكون الزمرة G جداءً مباشراً لزمرها الجزئية H_1, H_2 إذا وفقط إذا كان

(a) $G = H_1 H_2$

(b) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$

(c) كل عنصر من H_1 يتبادل مع كل عنصر من H_2.

البرهان. إذا كانت G جداءً مباشراً لزمرها الجزئية H_1, H_2، عندئذٍ فإن (a) و (c) و (b) محقق لأنه، من أجل أي $g \in H_1 \cap H_2$، يتطابق العنصر (g, g^{-1}) مـــع e بالنـــسبة للتطبيق $h_1 h_2 \mapsto (h_1, h_2)$، وبالتالي يساوي (e, e).

بالعكس، (c) يقتضي بأن $h_1 h_2 \mapsto (h_1, h_2)$ تشاكل، و (b) يبين بأن التطبيق متباين:

$$h_1 h_2 = e \Rightarrow h_1 = h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{e\}.$$

أخيراً، من (a) نجد بأنه غامر.

قضية 50.1 تشكل الزمرة G جداءً مباشراً لزمرها الجزئية H_1, H_2 إذا وفقط إذا كان

(a) $G = H_1 H_2$

(b) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$

(c) كل من H_1, H_2 ناظمية في G.

البرهان. لقد برهنت هذه الشروط في القضية السابقة، بقي أن نبرهن بأن كل عنصر h_1 من H_1 يتبادل مع كل عنصر h_2 من H_2. إن المبادل

$$[h_1, h_2] \overset{\text{def}}{=} h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = \left(h_1 h_2 h_1^{-1}\right).h_2^{-1} = h_1\left(h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}\right)$$

ينتمي إلى H_2 لأن H_2 ناظمية، وينتمي إلى H_1 لأنها ناظمية، و من (b) نجد بأنه يساوي e، وبالتالي $h_1 h_2 = h_2 h_1$.

قضية 51.1 تكون الزمرة G جداءً مباشراً لزمرها الجزئية $H_1, H_2, \dots, H_k$ إذا وفقط إذا كان

(a) $G = H_1 H_2 \dots H_k$

(b) $H_j \cap \left(H_1 \dots H_{j-1} H_{j+1} \dots H_k\right) = \{e\}$، لكل j

(c) كل من $H_1, H_2, \dots, H_k$ ناظمية في G.

البرهان. لزوم الشرط واضح، سوف نبرهن على كفاية الشرط. من أجل $k = 2$، فقد قمنا ببرهانه سابقاً، ولذلك سنناقش بالاستقراء على k. إن المناقشة بالاستقراء المستخدمة في (36.1) تبين بأن $H_1 H_2 \dots H_{k-1}$ زمرة جزئية ناظمية في G. إن الشروط (a,b,c) محققة بالنسبة للزمر الجزئية $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$ في $H_1 H_2 \dots H_{k-1}$، ولذلك ومن الفرض الاستقرائي يكون

$$\left(h_1, h_2, \dots, h_{k-1}\right) \mapsto h_1 h_2 \dots h_{k-1} :$$

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_{k-1} \to H_1 H_2 \dots H_{k-1}$$

تماثلاً. إن الزمرتين $H_1, H_2, \dots, H_{k-1}$ و H_k تحققان فرضيات (50.1)، ولذلك فإن

$$\left(h, h_k\right) \mapsto h h_k : \left(H_1 \dots H_{k-1}\right) \times H_k \to G$$

تماثل أيضاً. إن تركيب هذه التماثلات

$$H_1 \times H_2 \times \dots \times H_{k-1} \times H_k \xrightarrow{\left(h_1, \dots, h_k\right) \mapsto \left(h_1 \dots h_{k-1} h_k\right)} H_1 H_2 \dots H_{k-1} \times H_k \xrightarrow{\left(h, h_k\right) \mapsto h h_k} G$$

يرسل $\left(h_1, h_2, \dots, h_k\right)$ إلى $h_1 h_2 \dots h_k$.

الزمر التبديلية (Commutative groups)

إنّ تصنيف الزمر التبديلية المنتهية التوليد درست بشكل أكبر كجزء في مبرهنة المودولات على حلقة الإيديالات الرئيسية، لكن، من أجل أن نكمل ذلك، فيما يلي الشرح الأولي.

لتكن M زمرة تبديلية، مع عملية الجمع، إن الزمرة $\langle x_1, \ldots x_k \rangle$ من M و المولدة بالعناصر $x_1, \ldots, x_k$ تتكون من المجموع $\sum m_i x_i\ ,\ m_i \in \mathbb{Z}$. تسمى المجموعة الجزئية $\{x_1, \ldots, x_k\}$ قاعدة لـ M إذا كانت تولد M و

$$m_1 x_1 + \ldots + m_k x_k = 0 \Rightarrow m_i x_i = 0, m_i \in \mathbf{Z} \text{ لكل } i$$

من الواضح، أن لـ M قاعدة منتهية إذا وفقط إذا كان مجموعاً مباشراً لزمر دائرية منتهية.

تمهيدية 52.1 بفرض أن M مولدة بالمجموعة $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ولتكن $c_1, \ldots, c_k$ أعداد صحيحة، بحيث يكون $\gcd(c_1, \ldots, c_k) = 1$. عندئذٍ توجد مولدات $y_1, \ldots, y_k$ من M، بحيث يكون $y_1 = c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k$.

البرهان. إذا كان $c_i < 0$، نغير إشارات كل من c_i و x_i. هذا يسمح لنا بأن نفرض أن كل من $c_i \in \mathrm{N}$. بالاستقراء على $s = c_1 + \ldots + c_k$. تكون التمهيدية محققة إذا كان $s = 1$، نفرض أن $s > 1$. عندئذٍ، يوجد على الأقل عنصران من c_i غير معدومين، وليكن، $c_1 \geq c_2 > 0$. الآن إن $M = \langle x_1, x_1 + x_2, x_{3,} \ldots, x_k \rangle$ وبما أن $\gcd(c_1 - c_2, c_2, c_3, \ldots, c_k) = 1$، ومنه، بالاستقراء، $M = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle$، حيث

$$\begin{aligned} y &= (c_1 - c_2)x_1 + c_2(x_1 + x_2) + c_3 x_3 + \ldots + c_k x_k \\ &= c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k \end{aligned}$$

مبرهنة 53.1 كل زمرة تبديلية منتهية التوليد لها قاعدة.

البرهان. نناقش بالاستقراء على عدد مولدات M. إذا كانت M مولدة بعنصر واحد، تكون الحالة التافهة، ولذلك نفرض بأنه يكون لدينا $k > 1$ مولد على الأقل. من المجموعة $\{x_1, \ldots, x_k\}$ المولدة لـ M مع k عنصر يوجد عنصر واحد x_1 بحيث تكون رتبته هي الرتبة الأصغر. نبين لاحقاً بأن M هي المجموع المباشر لـ $\langle x_1 \rangle$ و $\langle x_2, \ldots, x_k \rangle$. وهذا يكمل البرهان، وذلك من الفرض الاستقرائي ومن أن قواعد المودول الثاني و x_1 يشكلان قاعدة لـ M.

إذا لم تكن M مجموعاً مباشراً لـ $\langle x_1 \rangle$ و $\langle x_2, \ldots, x_k \rangle$، عندئذٍ توجد العلاقة

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_k x_k = 0, \qquad (9)$$

حيث $m_1 x_1 \neq 0$. لــيكن $d = \gcd(m_1,\dots,m_k) > 0$، ولــيكن $c_i = m_i \mid d$. مــن التمهيدية، و $M = \langle y_1,\dots,y_k \rangle$ و $y = c_1 x_1 + \dots + c_k x_k$. لكن

$$dy_1 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_k x_k = 0$$

و $d \le m_1 < o(x_1)$، وهذا تناقض.

نتيجة 54.1 الزمرة التبديلية المنتهية G و المؤلفة من n عنصر على الأكثر من الرتبة n تكون دائرية.

البرهان. من المبرهنة لدينا، $G \approx C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$ من أجل $n_i \in N$. ومن الفرض ينتج أن n_i أولية نسبياً. ليكن a_i عنصراً يولد العامــل i. عندئـــذٍ $(a_1,\dots,a_r)$ مــن الرتبــة $n_1 \dots n_r$، وبالتالي فهي تولد G.

ملاحظة 55.1 ليكن F حقل ما. إن العناصر من الرتبة n في F^X هي جـــذور لكثيـــرة الحدود $X^n - 1$. لأن التحليل وحيد في F^X، يوجد منها n جذر على الأكثر، ولذلك فإن النتيجة تبين بأن أي زمرة جزئية منتهية من F^X تكون دائرية.

مبرهنة 56.1 يمكن أن تمثل الزمرة التبديلية المنتهية التوليد غير التافهة M بالشكل

$$M \approx C_{n_1} \times \dots \times C_{n_s} \times C_\infty^r \qquad (10)$$

من أجل أعداد صحيحة معينة $n_1,\dots,n_s \ge 2$ و $r \ge 0$. وبالإضافة لذلك فإن

(a) r يعرف M بشكل وحيد

(b) يمكن اختيار n_i بحيث يكون $n_1 \ge 2$ و $n_1 \mid n_2,\dots,n_{s-1} \mid n_s$، وعندئذٍ فهي تعرف M بشكل وحيد.

(c) يمكن اختيار n_i بحيث تكون قوى لأعداد أولية، وبالتالي فهي تحدد M بشكل وحيد.

يدعى العدد r مرتبة (rank) M. تتعرف M بطريقة وحيدة بواسطة r، نعني بذلك أن كل تحليلين لــ M من الشكل (10)، سيكون عدد الزمر من C_∞ نفسه (وبالنسبة إلـــى n_i في (b) و (c) نبرهن بشكل مشابه). تسمى الأعـــداد الـــصحيحة $n_1,\dots,n_s$ فـــي (b) القواسم اللامتغيرة لــ M. تعني (c) أن M يمكن أن تمثل

$$M \approx C_{p_1^{e_1}} \times \dots \times C_{p_t^{e_t}} \times C_\infty^r,\ e_i \ge 1 \qquad (11)$$

من أجل قوى لأعداد أولية معينة $p_i^{e_i}$ (يمكن تكرار الأعداد الأولية)، إن الأعداد الصحيحة $p_1^{e_1},\dots,p_t^{e_t}$ تعرف M بشكل وحيد، وتسمى بالقواسم الابتدائية لــ M.

البرهان. الإثبات الأول هو معنى آخر للمبرهنة 53.1.

(a) لكل عدد أولي p لا يقسم أي من d_i

$$M/pM \approx (C_\infty/pC_\infty)^r \approx (\mathrm{Z}/p\mathrm{Z})^r$$

وبالتالي فإن r هو البعد للزمرة M/pM باعتباره F_p - فضاء متجهي.

(b,c) إذا كان $\gcd(m,n)=1$ ، عندئذٍ $C_m \times C_n$ تحتوي على عنصر من الرتبة mn ، ولذلك

$$C_m \times C_n \approx C_{mn} \qquad (12)$$

باستخدام (12) لتحليل C_{n_i} إلى جداء زمر دائرية رتبة كل منها قوى لأعداد أولية. وهذا قد تحقق، (12) يمكن أن تستخدم لتجميع عوامل لتشكيل تحليل كالتحليل في (b)، مثلاً، $C_{n_s}=\prod C_{p_i^{e_i}}$، حيث يكون الجداء من أجل أعداد أولية مختلفة من p_i و e_i أكبر قوة للعدد الأولي p_i .

لبرهان الوحدانية في (b) و (c)، يمكن أن نستبدل M بزمرة الفتل الجزئية (ولذلك نفرض أن $r=0$). إن العدد الأولي p سيكون أي عدد أولي p_i في (11) إذا وفقط إذا كانت M تحوي على عنصر من الرتبة p ، في الحالة التي يكون فيها p مكرر a مرة حيث p^a عدد العناصر من الرتبة التي تقسم p . وبشكل مشابه، p^2 سيقسم بعضاً من العناصر $p_i^{e_i}$ في (11) إذا وفقط إذا حوت M على عنصر من الرتبة p^2 ، في تلك الحالة سوف يقسم تماماً b الأعداد $p_i^{e_i}$ ، حيث $p^{a-b}p^{2b}$ عدد العناصر في M من الرتبة التي تقسم p^2 . بالمتابعة بهذه الطريقة، نجد بأن القواسم الأولية لـ M يمكن أن تعرف من عدد عناصر M التي رتبة كل منها قوى لعدد أولي.

يمكن أن نتوصل إلى وحدانية العوامل اللامتغيرة من القواسم الأولية، أو يمكن أن تبرهن مباشرةً: ليكن n_s أصغر عدد صحيح أكبر من الصفر، بحيث يكون $n_sM=0$ ، n_{s-1} أصغر عدد صحيح أكبر من الصفر بحيث يكون تكون $n_{s-1}M=0$ دائرية، n_{s-2} أصغر عدد صحيح بحيث إن n_{s-2} يمكن أن يمثل على شكل جداء لزمرتين دائريتين، وهكذا.

تبرهن المبرهنة التي تكمل تصنيف الزمر التبديلية المنتهية: كل زمرة كهذه تكون متماثلة تماماً مع إحدى الزمر الآتية

$$C_{n_1} \times \ldots \times C_{n_r}\ ,\ n_1 | n_2, \ldots, n_{r-1} | n_r$$

رتبة هذه الزمرة تساوي $n_r. \ldots n_1$. مثلاً، كل زمرة تبديلية من الرتبة 90 تماثل تماماً واحدة من الزمر الآتية C_{90} أو $C_3 \times C_{30}$ - لتوضيح ذلك، نلاحظ أن أكبر عامل لامتغير يجب أن يكون العامل من الرتبة 90 و القابل للقسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من 90 .

الميزات الخطية للزمر التبديلية

ليكن $m(C)=\{z\in C,\ |z|=1\}$. هذه زمرة غير منتهية. لأي عدد صحيح n، المجموعة $m_n(C)$ من العناصر من الرتبة القاسمة لـ n تكون دائرية من الرتبة n، في الحقيقة

$$m_n(C)=\{e^{2\pi i m/n},\ 0\le m\le n-1\}=\{1,x,\ldots,x^{n-1}\}$$

حيث $x_n=e^{2\pi i/n}$ الجذر النوني الابتدائي للواحد.

إن الميزة الخطية (أو الميزة فقط) للزمرة G هو التشاكل $G\to m(C)$. إن المجموعة $G^{\vee}$ مع هذه الميزات تصبح زمرة بالنسبة لعملية الجمع

$$(c+c')(g)=c(g)\,c(g')$$

تسمى هذه الزمرة بالزمرة الثنوية. مثلاً، إن التطبيق $c\mapsto c(1)$ تماثل من الزمرة الثنوية $\mathbf{Z}^{\vee}$ إلى $m(C)$.

نسمي التشاكل $a\mapsto 1$ بالميزة التافهة (أو الأساسية).

الباقي التربيعي بالمودول p للأعداد الصحيحة a التي لا تقبل القسمة على p معرفة بالشكل

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases}1 & \text{مربع في } a \quad \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\\ -1 & \text{غير ذلك}\end{cases}$$

من الواضح، إن هذا يعتمد فقط على a بالمودول p، وإذا كان كل من a,b لا يقبلان القسمة على p، عندئذٍ $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{P}\right)$، و لذلك فإن $\left(\frac{a}{b}\right):(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{c}\to\{\pm1\}=m_2(C)$ $[a]\mapsto$ هي ميزة $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{c}$.

لنرمز الآن لأي زمرة دائرية من الرتبة n بالرمز $m(n)$ (ليس بالضرورة $m_n(C)$)، و للزمرة التبديلية ذات القوة (exponent) n، بالرمز $G^{\vee}=\mathrm{Hom}(G,m_n)$.

مبرهنة57.1 لتكن G زمرة تبدبلية منتهية بقوة n .

(a) إن الزمرة الثنوية $G^{\vee}$ متماثلة مع G.

(b) التطبيق $G\to G^{\vee\vee}$ الذي ترسل أي عنصر a من G إلى الميزة $c\mapsto c(a)$ في $G^{\vee}$ يكون تماثلاً.

وبعبارة أخرى، $G\approx G^{\vee}$ و $G^{\vee\vee}\quad G$.

البرهان. البرهان واضح من أجل الزمر الدائرية، و $(G \times H)^{\vee} \cong G^{\vee} \times H^{\vee}$.

58.1 نعني بأن التطبيق الطبيعي $G \to G^{\vee\vee}$ تماثل ويكون حالة خاصة من مبرهنة (بونترياغين). وبتعميم الحالة، من الضروري أن تعتبر الزمر في الطبولوجيا. مثلاً، كما لاحظنا سابقاً، $m(C)$ $Z^{\vee}$، كل $m \in Z$ ستعرف ميزة $x \mapsto x^{m} : m(C) \to m(C)$، يوجد العديد من التشاكلات $m(C) \to m(C)$ ليست من هذا الشكل، لكن هذه الحالات المستمرة فقط. لتكن G زمرة تبديلية معطاة في الطبولوجية المتراصة المحلية لأجل عمليات الزمرة المستمرة ، عندئذٍ الزمرة $G^{\vee}$ مع الخواص المستمرة $G \to m(C)$ لها الميزة الطبولوجية الطبيعية لتكون متراصة كلياً، وبالتالي التطبيق الطبيعي $G \to G^{\vee\vee}$ يكون تماثلاً حسب مبرهنات (بونترياغين) الثنوية.

مبرهنة59.1 (علاقات التعامد) لتكن G زمرة تبديلية منتهية. لأي ميزتين c و y في G،

$$\sum_{a \in G} c(a) y\left(a^{-1}\right) = \begin{cases} |G|; & c = y \\ 0 \;; & c \neq y \end{cases}$$

وبحالة خاصة

$$\sum_{a \in G} c(a) = \begin{cases} |G| & \text{تافهة } c \text{ إذا كانت} \\ 0 & \text{فى الحالات الأخرى} \end{cases}$$

البرهان. إذا كان $c = y$ ، عندئذٍ $c(a) y\left(a^{-1}\right) = 1$ ، وبالتالي فإن المجموع يساوي $|G|$، فيما عدا ذلك يوجد $b \in G$، بحيث يكون $c(b) \neq y(b)$. حيث a تمسح كل G، وكذلك ab أيضاً، ومنه

$$\sum_{a \in G} c(a) y\left(a^{-1}\right) = \sum_{a \in G} c(ab) y\left((ab)^{-1}\right)$$

$$= c(b) y\left(b^{-1}\right) \sum_{a \in G} c(a) y\left(a^{-1}\right)$$

لأن $c(b) y\left(b^{-1}\right) \neq 1$ ، وبالتالي $\sum_{a \in G} c(a) y\left(a^{-1}\right) = 0$.

نتيجة60.1 لأي $a \in G$ يكون

$$\sum_{a\in G^\vee} c\left(a\right)=\begin{cases} \left| G \right| & \text{إذا كان } a=e \\ 0 & \text{في الحالات الأخرى} \end{cases}$$

البرهان. بتطبيق المبرهنة على $G^\vee$، نلاحظ أن G $\left(G^\vee\right)^\vee$.

تمارين

إن هذه التمارين موضحة بالشرح كما هو مطلوب ليؤخذ بها.

1-1 بيّن أن الزمرة الرباعية تحوي على عنصر واحد من الرتبة 2، يتبادل مع جميع عناصر الزمرة Q، استنتج أن Q تماثل D_4، و أن كل زمرة جزئية في Q تكون ناظمية.

2-1 نأخذ العناصر

$$a=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ b=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

في $\mathrm{GL}_2\left(\mathbf{Z}\right)$. بيّن أن $a^4=1$ و $b^3=1$، لكن رتبة العنصر ab غير منتهية، وبالتالي فإن الزمرة $\langle a,b\rangle$ غير منتهية.

3-1 بيّن أن كل زمرة منتهية رتبتها عدد زوجي تحوي على عنصر رتبته تساوي 2.

4-1 لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G دليلها يساوي n. بيّن أنه إذا كان $g\in G$، عندئذٍ فإن $g^n\in N$. أعطي مثالاً تبيّن فيه أن من الممكن أن يكون هذا خاطئاً إذا لم تكن N ناظمية.

5-1 يقال بأن الزمرة ذات قوة منتهية إذا وجد $m>0$ بحيث يكون $a^m=e$ لكل $a\in G$، وهو أصغر عدد يحقق العلاقة السابقة سندعوه فيما بعد قوة G. بيّن أن كل زمرة قوتها يساوي 2 تكون تبديلية.

6-1 يقال عن الزمرتين H و H' أنهما قابلتان للقياس إذا كان دليل $H\cap H'$ منته في كل من الزمرتين H و H'. بيّن أن قابلية القياس تشكل علاقة تكافؤ على الزمر الجزئية في G.

الفصل الثاني

الزمر الحرة والتقديمات، زمر كوكستير

Free Groups and Presentations Coxeter groups

من المفيد دائماً لوصف زمرة إعطاء مجموعة من المولدات ومجموعة من الروابط للمولدات التي تستنتج منها علاقات أخرى. مثلاً، يمكن وصف الزمرة D_n بالمولدات r, s و العلاقات

$$r^n = e, \; s^2 = e, \; srsr = e$$

في هذا الفصل، نعطي القيمة لهذا المعنى. أولاً نحتاج لتعريف الزمرة الحرة على مجموعة X من المولدات ـ هذه الزمرة مولدة بـ X بدون علاقات باستثناء تلك التي تكون مستنتجة من مسلمات الزمرة. لأن النظائر قد تسبب التباسات، سنقوم أولاً بالدراسة على أنصاف الزمر[8]، والتي نعني بها المجموعة S مع عملية ثنائية معرفة عليها وعنصرها المحايد e. إن التشاكل $\alpha : S \to S'$ من أنصاف الزمر هو تطبيق يحقق $\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)$ لكل $a, b \in S$ و $\alpha(e) = e$. عندئذٍ α يحافظ على كل الجداءات المنتهية.

أنصاف الزمر الحرة (Free semigroups)

لتكن $X = \{a, b, c, \ldots\}$ (من الممكن أن تكون غير منتهية) مجموعة من الرموز، الكلمة (word) هي متتالية منتهية من رموز X والتي يمكن التكرار فيها. مثلاً، إن

$$aa, \; aabac, \; b$$

كلمات مختلفة. يمكن ضرب كلمتين وذلك بالدمج بينهما، مثلاً،

$$aaaa * aabac = aaaaaabac$$

هذا يعرف على كل مجموعة الكلمات عملية ثنائية تجميعية. كما توجد متتالية خالية، نرمز لها بالرمز 1. (في الحالة التي يكون فيها الرمز 1 من المجموعة X، نرمز له برمز مختلف).

---

[8] ويسمى أيضاً مونوئيد.

عندئذٍ فإن الرمز 1 هو العنصر المحايد. نكتب SX لمجموعة من الكلمات مع هذه العملية الثنائية. عندئذٍ SX نصف زمرة، وتسمى نصف الزمرة الحرة **(**free semigroups**)** على X.

إذا طابقنا العنصر a من X مع الكلمة a، تصبح X مجموعة جزئية من SX وتولدها (أي أنه لا يوجد نصف زمرة جزئية من SX تحوي X). على أية حال، للتطبيق $X \to SX$ الخاصة العامة الآتية: من أجل أي تطبيق للمجموعات $a : X \to S$ من X إلى نصف الزمرة S، فإنه يوجد تشاكل وحيد $SX \to S$ يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a\,\mathbf{a}\,a"] \arrow[dr, "a"'] & SX \arrow[d, dotted] \\ & S \end{tikzcd}$$

في الحقيقة، يأخذ التمديد الوحيد لـــ a القيم الآتية:

$$a\,(1) = 1_S\ ,\quad a\,(dba...) = a\,(d)\,a\,(b)\,a\,(a)...$$

الزمر الحرة (Free groups)

نريد أن نبني زمرة FX تحوي X ولها نفس الخواص العامة لـــ SX مع "نصف زمرة" بدلاً من "زمرة". نعرف X' على أنها مجموعة حاوية على رموز من X مع رمز إضافي أيضاً، نرمز بـــ a^{-1}، لكل $a \in X$، وبهذا يكون

$$X' = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, ...\}$$

ليكن W' مجموعة الكلمات التي رموزها من X'. تصبح نصف زمرة بالنسبة لعملية الدمج، ولكنها ليست زمرة لأن a^{-1} ليس نظيراً لـــ a حتى الآن، ولا يمكن حذف الحدود الواضحة في الكلمات التي لها الشكل الآتي:

$$...aa^{-1}... \text{ أو } ...a^{-1}a...$$

تسمى الكلمة مختزلة (reduced) إذ كانت لا تحوي على أي من الأزواج $a^{-1}a$ أو aa^{-1}.
بالبدء بالكلمة w، يمكننا أن نشكل متتالية منتهية من الاختصارات لنصل إلى الكلمة المختزلة (من المحتمل أن تكون الخالية)، والتي سنسمي كل منها بالشكل المختزل (reduced form) w_0 لـــ w. يمكن إيجاد طرق مختلفة لتشكيل هذه الاختصارات، مثلاً،

$$ca\underline{bb^{-1}}a^{-1}c^{-1}ca \to c\underline{aa^{-1}}c^{-1}ca \to \underline{cc^{-1}}ca \to ca$$

$$cabb^{-1}a^{-1}\underline{c^{-1}c}a \to cbb^{-1}\underline{a^{-1}a} \to ca\underline{bb^{-1}} \to ca$$

وضعنا خطوطاً تحت الأزواج المختصرة. نلاحظ بأن الرمز المتوسط a مختــزل بـــالرمز المختلف عنه a^{-1}، والحدود المختلفة بقيت في الحالتين (الكلمة ca التي في الجهة اليمنـــى من الاختصار الأول، والكلمة ca في الجهة اليسرى من الاختصار الثـــاني). وصـــلنا إلـــى النتيجة نفسها، والنتيجة الآتية ستبين لنا بأن هذا سيحصل دائماً.

قضية1.2 يوجد شكل مختزل واحد فقط لكل كلمة.

البرهان. نستخدم مبدأ الاستقراء الرياضي على طول الكلمة w. إذا كانت w مختزلة، عندئذٍ فإن البرهان محقق. أما في الحالات الأخرى نفرض أولاً أنه لدينا أحــد الأزواج التـــي لهـــا الشكل $a_0^{-1}a_0$، أو، $a_0\,a_0^{-1}$ لأن الترتيب نفسه في الحالتين.

نفرض أن أي شكلين مختزلين لـــ w اللذين نحصل عليهما بمتتالية من الاختـــصارات، والتي يكون فيها $a_0a_0^{-1}$ مختصراً في البداية، متساويان، وذلك لأننا نستطيع تطبيق الفـــرض الاستقرائي على الكلمة (الأقصر) التي حصلنا عليها بالاختصار $a_0a_0^{-1}$.

بعد ذلك نفرض أن أي شكلين مختزلين لـــ w الـــذين حـــصلنا عليهمـــا بمتتاليـــة مـــن الاختصارات، والتي يكون فيها $a_0a_0^{-1}$ مختصراً في بعض النقاط، متساويان، لأن نتيجة هذه المتتالية من الاختصارات لن تتأثر إذا كان $a_0a_0^{-1}$ مختصراً في البداية.

أخيراً، نعتبر أن الشكل المختزل w_0 الذي حصلنا عليه بمتتالية من الاختصارات والتـــي لا يكون فيها أي اختصار ينتج $a_0a_0^{-1}$ مباشرةً. بما أن $a_0a_0^{-1}$ لن يبقى في w_0، عنـــدها سيختصر واحدة على الأقل من a_0^{-1}، أو، a_0 في بعض النقاط. إذا لم يختصر الزوج نفـــسه، عندئذٍ الاختصار الأول الذي يتضمن الزوج يكون من الشكل

$$\ldots\underline{a_0\cancel{a}_0^{-1}}\cancel{a}_0 \ldots \text{ أو } \ldots\cancel{a}_0^{-1}\underline{\cancel{a}_0a_0^{-1}}\ldots$$

حيث وضع خطاً تحت الزوج الأساسي. لكن الكلمة التي حصلنا عليها بعد هذه الاختـــصارات ستكون نفسها فيما إذا كان الزوج الأساسي مختصراً، ولهذا يمكن أن نختصر الزوج الأساسي بدلاً منها. وبذلك سنعود إلى الحالة التي برهنت.

نقول أن الكلمتين w و w' متكافئتان (equivalent)، ونرمز لهما بـــالرمز $w \quad w'$، إذا كان لهما الشكل المختزل نفسه. وهي تشكل علاقة تكافؤ (واضحة).

قضية2.2 إن جداء كلمتين متكافئتين هو كلمة مكافئة لهما، أي أن

$$w \quad w', v \quad v' \Rightarrow wv \quad w'v'$$

البرهان. ليكن w_0 و v_0 شكلان مختزلان للكلمتين w و v على الترتيب. لكي نحصل على الشكل المختزل للكلمة wv، يجب أن نحذف أولاً كل ما هو ممكن في الكلمتين w و v كلٍ على حدا. حتى نحصل على شكل الكلمة w_0v_0 ومن ثم نتابع الحذف. وبهذا ينتج الشكل المختزل للكلمة w_0v_0 من الكلمة wv. والحالة المشابهة محققة لأجل الكلمة $w'v'$، لكن (من الفرض) الشكلان المختزلان لـ w و v يكافئان الشكلين المختزلين لـ w' و v'، وبهذا نحصل على النتيجة نفسها في الحالتين.

لتكن FX مجموعة جميع صفوف التكافؤ للكلمات. إن القضية 2.2 تبين بأن العملية الثنائية على W' تعرف عملية ثنائية على FX، التي تتحول بشكل واضح إلى نصف زمرة. وهي تحوي أيضاً على النظائر، لأن

$$(ab\ldots gh)\left(h^{-1}g^{-1}\ldots b^{-1}a^{-1}\right) \quad 1$$

وبهذا تصبح FX زمرة، تسمى بالزمرة الحرة (free group) على X. والخلاصة: إن عناصر FX ممثلة بكلمات من X'؛ تمثل الكلمتان العنصر نفسه من FX إذا وفقط إذا كان لهما الشكل المختزل نفسه؛ ويعرف الجداء بطريقة الدمج؛ و تمثل الكلمة الخالية بـ 1؛ نحصل على النظائر بطريقة بسيطة. وبالتالي، كل كلمة من FX تمثل بكلمة مختزلة وحيدة، مع عملية الجداء المعرفة عليها وهي عملية الدمج للوصول إلى الشكل المختزل.

إذا طابقنا $a \in X$ بصف التكافؤ للكلمة a (المختزلة)، عندئذٍ تتحول X على أنها تتطابق مع مجموعة جزئية في FX - من الواضح أنها تولد FX. إن القضية الآتية هي ملخص لمعنى الحقيقة الذي تنص على أنه لا توجد علاقات بين عناصر X عندما تعتبر كعناصر من FX باستثناء العناصر المفروضة في مسلمات الزمرة.

قضية3.2 لأي تطبيق $a : X \to G$ من المجموعة X إلى الزمرة G، يوجد تشاكل وحيد $FX \to G$ يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a \; \mathbf{a} \; a"] \arrow[dr, "a"'] & FX \arrow[d, dotted] \\ & G \end{tikzcd}$$

البرهان. نأخذ التطبيق $a : X \to G$. ونمدده إلى التطبيق $X' \to G$ والمعطى بالشكل $a\left(a^{-1}\right) = a\,(a)^{-1}$. بما أن G، كحالة خاصة، نصف زمرة، نمدد a إلى التشاكل لأنصاف الزمر $SX' \to G$. هذا التطبيق سيرسل الكلمات المتكافئة إلى العنصر نفسه في G، ولذلك سوف يتحلل إلى عوامل من خلال $FX = SX'/$. إن التطبيق الناتج

$FX \to G$ هو تشاكل زمري. وهو وحيد لأننا نعلم بأنه معرف على مجموعة من مولدات لـــ FX.

ملاحظة 4.2 يتصف التطبيق $i : X \to FX\ ,\ x \mapsto x$ بالخاصة العامة الآتيـــة: إذا كـــان $i' : X \to F'$ تطبيق آخر وله الخاصـــة العامـــة نفـــسها، عندئـــذٍ يوجـــد تماثـــل وحيـــد $\alpha : FX \to F'$ بحيث يكون $\alpha \circ i = i'$،

$$\begin{tikzcd} & FX \arrow[dd, "\alpha"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i'"'] & \\ & F' \end{tikzcd}$$

نتذكر البرهان: بالنسبة إلى i بشكل عام، يوجد تشاكل وحيد $\alpha : FX \to F'$ بحيث يكـــون $\alpha \circ i = i'$؛ وبالنسبة إلى i' بشكل عام، يوجد تشاكل وحيد $\beta : F' \to FX$ بحيث يكـــون $\beta \circ i' = i$؛ الآن، إن $(\beta \circ \alpha) \circ i = i$، لكن بالنسبة إلى i، يكون id_{FX}، هـــو التـــشاكل الوحيد $FX \to FX$ بحيث يكون $id_{FX} \circ i = i$، وبالتالي $\beta \circ \alpha = id_{FX}$، وبشكل مشابه، $\alpha \circ \beta = id_{F'}$؛ وبهذا فإن α و β تماثلان عكوسان.

نتيجة 5.2 كل زمرة هي زمرة قسمة لزمرة حرة.

البرهان. نختار المجموعة X من مولدات الزمرة G (مثلاً، $X = G$)، ولتكن F زمرة حرة مولدة بالمجموعة X. من (3.2)، يمدد التطبيـــق $\alpha : X \to G\ \ a \mapsto a$ إلـــى التـــشاكل $F \to G$، وكون الصورة، عبارة عن زمرة جزئية تحوي X، فهي تساوي G.

إن الزمرة الحرة على المجموعة $X = \{a\}$ تكون ببساطة زمرة دائرية غير منتهية C_∞ مولدة بالعنصر a، لكن الزمرة الحرة على مجموعة مكونة من عنصرين تكون معقدة جداً.

سأناقش الآن، وبدون برهان، بعض النتائج الهامة على الزمر الحرة.

مبرهنة 6.2 (Nielsen- Schreier)[9] كل زمرة جزئية من زمرة حرة هي زمرة حرة.

يستخدم البرهان الأفضل في الطبولوجية، وبشكل خاص في الفضاءات المتراصة- انظـــر Serre 1980 أو Rotman 1995، المبرهنة 11.44.

[9] Nielsen (1921) برهن هذا من أجل الزمر الجزئية المنتهية التوليد، وفي الحقيقة أعطى خوارزمية للبـــت فيما إذا كانت الكلمة تقع في الزمر الجزئية، Schreier (1927) برهن الحالة العامة.

تكون الزمرتان FX و FY متماثلتين إذا وفقط إذا كان لكل مــن X و Y القــدرة نفسها. ولذلك يمكن أن نعرف مرتبة الزمرة الحرة G بأنها قدرة أي مجموعة مولــدة حــرة (المجموعة X للزمرة G والتي من أجلها يكون التشاكل $FX \to G$ المعطى فــي (3.2) تماثلاً). لتكن H زمرة جزئية منتهية التوليد من زمرة حرة G. عندئذٍ توجــد خوارزميــة لتشكيل من أي مجموعة منتهية من مولدات H مجموعة منتهية حرة من المولدات.

إذا كانت G من الرتبة n وكان $(G:H) = i < \infty$، عندئذٍ تكون H زمرة حــرة مــن الرتبة

$$ni - i + 1$$

وبشكل خاص، يمكن أن تكون رتبة H أكبر من رتبــة F. للبــراهين، انظــر Rotman 1995، الفصل 11، و Hall 1959، الفصل 7.

المولدات والعلاقات (Generators and relation)

نعتبر المجموعة X و المجموعة R المؤلفة من الكلمات المتشكلة من رمــوز X'. كــل عنصر من R يمثل عنصر للزمرة الحرة FX، إن زمرة القسمة لــ G من FX علــى الزمرة الجزئية الناظمية المولدة بهذه العناصر تملك X كمولدات (generators) لها و R كعلاقات (relation) (أو كمجموعة من العلاقات المعرفة). ويقال أيضاً بأن (X, R) تقديم للزمرة G، ونرمز لــ G بالرمز $\langle X \mid R \rangle$.

مثال 7.2 (a) إن لزمرة ديهيدرال D_n المولدات r, s والعلاقات المعرفة

$$r^n, s^2, srsr$$

(انظر 9.2 للبرهان)

(b) الزمــرة الرباعيــة المعممــة (generalized quaternion group) $Q_n, n \geq 3$، مولداتها a و b والعلاقات[10] هي

$$a^{2^{n-1}} = 1, a^{2^{n-2}} = b^2, bab^{-1} = a^{-1}$$

من أجل $n = 3$ هذه الزمرة في (17.1). في الحالة العامة، رتبتهــا 2^n (لمعرفــة المزيــد عنها، انظر التمرين
(4-2).

[10] بكلام أدق، سأقول بأن العلاقات $a^{2^{n-1}}, a^{2^{n-2}}b^{-2}, bab^{-1}a$.

(c) يتبـــادل العنـــصران a و b فـــي الزمـــرة إذا وفقـــط إذا كـــان مبادلهـــا (commutator) $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ يساوي 1. الزمرة الحرة التبديليـــة (free abelian group)بالنسبة للمولدات $a_1,...,a_n$ لها المولدات $a_1,...,a_n$ والعلاقات

$$[a_i,a_j],\quad i\neq j$$

من أجل بقية الأمثلة، انظر Massey 1967، الذي يحتـــوي علـــى كميـــة جيـــدة مـــن التداخلات بين نظرية الزمر

والطبولوجية. مثلاً، من أجل عدة أشكال من الفـــضاءات الطبولوجيـــة، توجـــد خوارزميـــة للحصول على تقديم الزمر الأساسية.

(d) الزمرة الأساسية لقرص مفتوح مع نقطة متحركة واحدة هي زمرة حـــرة علـــى s حيث s دوران حول النقطة (ibid II 5.1).

(e) الزمرة الأساسية لكرة مع r نقطة متحركة لها المولدات $s_1,...,s_r$ (حيث s_i هو الدوران حول i نقطة) والعلاقة الوحيدة

$$s_1...s_r=1$$

(f) الزمرة الأساســـية لـــسطح ريمـــان المتـــراص مـــن النـــوع g لـــه $2g$ مولـــد $u_1,v_1,...,u_g,v_g$ و العلاقة الوحيدة

$$u_1v_1u_1^{-1}v_1^{-1}...u_gv_gu_g^{-1}v_g^{-1}=1$$

(ibid IV التمرين 5.7).

قـــضية8.2 لـــتكن G زمـــرة معرفـــة بالتقـــديم (X,R). لأي زمـــرة H والتطبيـــق $a:X\to H$ الذي يرسل كل عنصر من R إلى 1 (في الحالة الواضحة[11])، يوجد تشاكل وحيد $G\to H$ يجعل المخطط الآتي تبادلياً:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a\ \mathbf{a}\ a"] \arrow[dr, "a"'] & G \arrow[d, dotted] \\ & H \end{tikzcd}$$

البرهـــان. نعلم من الخاصة العامة للزمـــر الحـــرة (3.2) بـــأن a يتمـــدد إلـــى التـــشاكل $FX\to H$، الذي نرمز له ثانيةً بالرمز a. لتكن iR صورة R في FX. من الفرض $iR\subset \mathrm{Ker}(a)$، ولذلك فإن الزمرة الجزئية الناظمية N مولدة بـــ iR وهي محتواة فـــي

[11] كل عنصر من R يمثل بعنصر واحد من X، و بشرط أن يكون التمديد الوحيد a لـــ FX يرسل كل هذه العناصر إلى 1.

$\operatorname{Ker}(a)$. من الخاصة العامة لزمر القسمة (42.1)، يتحلل a إلى عوامــل مــن خــلال $FX/N = G$. هذا يبرهن الوجود، وأما الوحدانية فتأتي من كوننا نعلم بأن التطبيق معرف على مجموعة من مولدات X.

مثال9.2 لتكن $G = \langle a,b;a^n,b^2,baba \rangle$. نبرهن بأن G تماثل زمــرة ديهيــدرال D_n (انظر 1.16). لأن العنصرين $r,s \in D_n$ تحقق هذه الشروط ، يمدد التطبيق

$$\{a,b\} \to D_n,\ a \mapsto r,\ b \mapsto s$$

بشكل وحيد إلى التشاكل $G \to D_n$. إن هذا التشاكل غامر لأن r و s يولــدان D_n. إن المعادلات

$$a^n = 1,\ b^2 = 1,\ ba = a^{n-1}b$$

تبين أن كل عنصر من G يمثل بإحدى العناصر الآتية،

$$1,\dots,a^{n-1},b,ab,\dots,a^{n-1}b$$

ومنه $|G| \le 2n = |D_n|$. لذلك يكون التشاكل غامراً (وهذه الرموز تمثل عناصر مختلفة من G).

بشكل مشابه،

$$G = \langle a,b;a^2,b^2,(ba)^n \rangle \quad D_n$$

بالعلاقة $a \mapsto s, b \mapsto t$.

التقديم المنتهي للزمر (Finitely presented groups)

يقال بأن الزمرة منتهية التقديم إذا كان لها التقديم (X,R)، بحيث تكون كل من X و R منتهية.

مثال 10.2 نعتبر G زمرة منتهية. لتكن $X = G$، ولتكن R مجموعة الكلمات

$$\{abc^{-1} \mid ab = c \in G\}$$

أدعي بأن (X,R) تقديم للزمرة G، ولهذا فإن G منتهية التقديم. لتكن $G' = \langle X \mid R \rangle$. إن التمديد $a \mapsto a : X \to G$ لـ FX يرسل كل عنصر من R إلى 1، ولــذلك نعرف التشاكل $G' \to G$، الذي يكون غامراً بشكل واضح. لكن كل عنصر من G' يمثــل بعنصر من X، ومنه $|G'| \le |G|$. لذلك فإن التشاكل غامر.

بما أنه يمكن تعريف، وبسهولة، زمرة بتقديم منته، بينما تعريف خواص الزمرة هو أمـــر بغاية الصعوبة- نلاحظ بأننا نعرف الزمرة، التي يمكن أن تكون صغيرة تماماً، كزمرة القسمة لزمرة حرة كبيرة بزمرة جزئية كبيرة. نستعرض بعض النتائج السلبية.

مسألة الكلمة (The word problem)

لتكن G زمرة معرفة بالتقديم المنتهي (X,R). مسألة الكلمة للزمرة G تـسأل فيمـا إذا توجد خوارزمية (طريقة محكمة) للجزم فيما إذا كانت الكلمة على X' تمثل 1 فـي G. إن الجواب سلبي. بيَن كل من Novicov و Boone بأنه توجد زمر منتهية التقديم G والتـي ليست لها خوارزمية كهذه. وبالطبع توجد زمر أخرى يوجد لها خوارزمية.

إن الأفكار نفسها قادت إلى النتيجة الآتية: لا توجد خوارزمية التي ستحدد لأي تقديم منته اختياري فيما إذا كانت الزمرة المقابلة تافهة، منتهية، تبديلية، قابلة للحـل، عديمـة القـوى، بسيطة، قابلة للفتل، حرة الفتل، حرة، أم لا، أم تحوي على مسألة الكلمة القابلة للحل.

انظر Rotman 1995، الفصل 12، للبرهان على هذه الحالات.

مسألة برنسايد (The Burnside problem)

نتذكر بأنه يقال عن الزمرة بأنها من القوة e إذا كان $g^e = 1$ لكـل $g \in G$ و e هـو أصغر عدد طبيعي يحقق هذه الخاصة. من السهل أن نكتب بعد ذلك أمثلة عن الزمـر غيـر المنتهية المولدة بعدد منته من العناصر من رتبة منتهية (انظر التمرين 2-1)، لكن هل توجـد زمر كهذه بقوة منتهية؟ (مسألة برنسايد). في عام 1968، كانت إجابة Adjan و Novikov نعم: توجد زمر منتهية التوليد وغير منتهية بقوة منتهية.

مسألة برنسايد المحددة (The Restricted Burnside problem)

إن زمرة برنسايد (Burnside group) التي قوتها e على r مولد $\mathrm{B}(r,e)$ هي زمـرة القسمة لزمرة حرة على r مولد بالزمرة الجزئية المولدة بكل قوى e. تتساءل مسألة برنسايد فيما إذا كان $\mathrm{B}(r,e)$ منته، ومن المعلوم لكي تكون غير منتهيـة باسـتثناء بعـض القـيم الصغيرة لـ r و e. إن مسألة برنسايد المحددة تتساءل فيما إذا $\mathrm{B}(r,e)$ يحتـوي فقـط على عدد منته من زمر القسمة المنتهية، وبشكل متكافئ، تسأل فيما إذا كانت توجـد زمـرة قسمة واحدة منتهية من $\mathrm{B}(r,e)$ حاوية على كل زمر القسمة المنتهية الأخرى كزمر قسمة.

إن تصنيف الزمر البسيطة المنتهية (انظر p48) يبين أنه لكي نبرهن علـــى أن $\mathrm{B}(r,e)$ يحتوي دائماً على عدد منته من زمر القسمة المنتهية، يكفي أن نبرهن بأن e هو قوة لعــدد أولي. هذا ما قام به Efim Zelmanov في عام 1989 بعد عمل مبكــر مــن Kostrikin. انظر Feit 1995.

خوارزمية تود - كوكستير (Todd-Coxeter algorithm)

يوجد بعض التقديمات المنتهية المنظورة السليمة تماماً والتي تكون معلومـــة لتعـــرف زمـــر صغيرة تماماً، لكن بالنسبة لتلك التمثيلات سيكون برهان هذا صعباً جداً. إن التقـــدم القياســـي لزمر القسمة هذه سيكون بدراسة خوارزمية تود - كوكستير (انظر الفصل الرابع).

سوف نطور طرق مختلفة لتمييز الزمر عن تقديماتها (انظر إلى التمارين أيضاً).

Maple

إن ما يلي نسخة لجلسة مدونة من Maple:

maple [This starts maple on a sun, pc, …]
with(group) ; [This loads the group package, and lists some of the available commands .]
G: =grelgroup ({a,b},{[a,a,a,a] , [b,b] , [b,a,b,a]}) ;
[This defines G to be the group with generators a , b and relations aaaa , bb , and baba ; use 1/a for the inverse of a .]
grouporder (G) ;
[This attempts to find the order of the group G .]
H: =subgrel ({x =[a,a] ,y =[b]} , G) ;
[This defines H to be the subgroup of G with generators x =aa and y = b]
pres (H) ; [This computes a presentation of H]
quit [This exits maple]
To go help on a command , type ? command

زمر كوكستير (Coxeter groups)

إن نظام كوكستير (Coxeter system) هو الـــزوج (G,S) المؤلـــف مـــن الزمـــرة G ومجموعـــة مـــن المولـــدات S للزمـــرة G الموضـــوعة فقـــط لعلاقـــات مـــن الـــشكل $(st)^{m(s,t)}=1$، حيث

$$\begin{cases} m(s,s) = & 1 \; all \;\; s, \\ m(s,t) \geq & 2 \\ m(s,t) = & m(t,s) \end{cases} \qquad (13)$$

عندما لا توجد علاقة بين s و t، نضع $m(s,t)=\infty$. عندئذٍ يكون نظام كوكستير معرفاً بالمجموعة S والتطبيق

$$m : S \times S \to \mathbf{U}\{\infty\}$$

محققاً (13)، عندئذٍ $G=\langle S \mid R\rangle$ حيث

$$R=\left\{(st)^{m(s,t)} \,\middle|\, m(s,t)<\infty\right\}$$

إن زمر كوكستير هي الزمر التي تظهر كجزء من نظام كوكستير. إن قدرة المجموعة S تسمى مرتبة (rank) نظام كوكستير.

أمثلة

11.2 تحت سقف التماثل، إن نظام كوكستير من المرتبة 1 هو $(C_2,\{s\})$ فقط.

12.2 أنظمة كوكستير من المرتبة 2 يكون دليلها $m(s,t)\geq 2$.

(a) إذا كان $m(s,t)$ عدداً صحيحاً n، عندئذٍ نظام كوكستير هو $(G,\{s,t\})$ حيث

$$G=\left\langle s,t;s^2,t^2,(st)^n\right\rangle \quad D_n$$

(انظر 2.9). بشكل خاص، $s\neq t$ و st من المرتبة n.

(b) إذا كان $m(s,t)=\infty$، عندئذٍ نظام كوكستير هو $(G,\{s,t\})$ حيث $G=\left\langle s,t;s^2,t^2\right\rangle$.

نعتبر التطبيق $\{s,t\}\to \mathrm{GL}_2(\;\;)$،

$$s \;\mathbf{a}\; s_s \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; t \;\mathbf{a}\; s_t \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

كما أن $s_s^2=1=s_t^2$، يمدد هذا التطبيق إلى التشاكل $G\to \mathrm{GL}_2(\;\;)$. الآن $s_s s_t=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ومنه

$$s_s s_t=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\;\; s_s s_t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي

$$\left(s_s s_t\right)^m \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

الذي يبين بأن $s_s s_t$ من رتبة[12] غير منتهية، ومنه فإن st من رتبة غير منتهية أيضاً.

13.2 لتكن $V = \ ^{n}$ مزوداً بالشكل التناظري الثنائي الموجب القانوني

$$\left(\left(x_i\right)_{1 \le i \le n}, \left(y_i\right)_{1 \le i \le n}\right) = \sum x_i\, y_i$$

الانعكاس (reflection) هو التطبيق الخطي $s : V \to V$ الذي يرسل المتجهات غير الصفرية a إلى $-a$ ويثبت نقاط السطوح الزائدة H_a المتعامدة على a. نكتب s_a للانعكاس المعرف بـ a، والذي يعطى بالصيغة

$$s_a v = v - \frac{2(v, a)}{(a, a)} a$$

لأن هذا يوضح a و H_a بشكل محدد، وبالتالي (بالخطية) على كل $V = \langle a \rangle \oplus H_a$. إن الزمرة الانعكاسية المنتهية هي زمرة مولدة بالانعكاسات. لزمر مثل G، من الممكن أن نختار مجموعة S من الانعكاسات المولدة لـتلك التي يكون فيها (G, S) نظام Coxeter (Humphreys 1990, 1.9).لهذا، فإن الزمر الانعكاسية المنتهية تكون جميع زمر كوكستير (في الحقيقة، من الواضح أنها زمر كوكستير المنتهية، ibid.,6.4).

14.2 لتكن S_n تؤثر على ^{n} بتبديل الإحداثيات،

$$s\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \left(a_{s(1)}, \ldots, a_{s(n)}\right)$$

المناقلة (ij) تبادل بين i و j، وترسل المتجه

$$a\left(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0, \overset{j}{-1}, 0, \ldots\right)$$

إلى نظيره، ويترك نقاط السطح الزائد

$$H_a = \left(a_1, \ldots, \overset{i}{a_i}, \ldots, \overset{j}{a_i}, \ldots, a_n\right)$$

مثبتاً. لذلك، يكون (ij) انعكاساً. كذلك S_n مولدة بالمناقلات، هذا يبين بأنها زمرة انعكاسية منتهية (وبالتالي فهي زمرة كوكستير أيضاً).

بنية زمر كوكستير (The structure of Coxeter groups)

[12] علينا أن نبين بأن شكل جوردان القانوني لـ $s_s s_t$ هو $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

مبرهنة 15.2 ليكن (G,S) نظام Coxeter المعرف بالتطبيق $m: S\times S \to \mathbf{U}\{\infty\}$ المحقق (13).

(a) إن التطبيق القانوني $S\to G$ غامر.

(b) كل $s\in S$ له الرتبة 2 في G.

(c) لكل $s\neq t$ في S، st من الرتبة $m(s,t)$ في G.

سيشغل البرهان بقية هذه الفقرة. نلاحظ أن رتبة s تساوي 1 أو 2، وإن رتبة st تقسم $m(s,t)$، ولذلك تنص المبرهنة على أن عناصر الزمرة S تبقى مختلفة في G و أن كل s وكل st لهما اكبر رتبة ممكنة.

ليكن e التطبيق $S\to\{\pm 1\}$ بحيث يكون $e(s)=-1$ لكل s. عندئذٍ e يرسل st إلى 1 لأي $s,t\in S$، ولذلك فهو يمدد إلى تشاكل الزمر $G\to\{\pm 1\}$ (انظر 8.2). كل s يطابق 1-، وبالتالي فهو من الرتبة 2.

هذا يبرهن (b)، ولكي نبرهن الحالات الباقية سنعتبر - فضاء متجهي V مع القاعدة $(e_s)_{s\in S}$ بدليل s. نعرف على V "هندسياً" التي يوجد لها "انعكاسات" مختلفة $s_s, s\in S$، بحيث إن $s_s s_t$ من الرتبة $m(s,t)$. من (8.2)، يمدد التطبيق $s\to s_s$ إلى التشاكل الزمري $G\to \mathrm{GL}(V)$. كما أن s_s مختلفة، يجب أن يكون s مختلفاً في G، و $s_s s_t$ من الرتبة $m(s,t)$، ويجب أن يكون العنصر st من الرتبة نفسها.

نعرف الشكل B الثنائي الخطية التناظري على V بالقاعدة الآتية

$$\mathrm{B}(e_s,e_t)=\begin{cases}-\cos(p/m(s,t)) & if\ \ m(s,t)\neq\infty\\ -1 & \text{غير ذلك}\end{cases}$$

كما أن $\mathrm{B}(e_s,e_t)=1\neq 0$، إن المتمم العمودي لـ e_s مع الحفاظ على B هو السطح الزائد الذي لا يحوي e_s، و لذلك $V=\langle e_s\rangle\oplus H_s$. وهذا يسمح بأن نعرف "الانعكاس" بالقاعدة

$$s_s v=v-2B(v,e_s)e_s, v\in V$$

من الواضح أن s_s هو التطبيق الخطي الذي يرسل e_s إلى نظيره ومثبت نقاط H_s، إذاً $s_s^2=1$ في $\mathrm{GL}(V)$.

من الواضح بأن s_s مختلف ، ومنه بقي أن نبين بأن $s_s s_t$ من الرتبة $m(s,t)$. لكل $s,t\in S$، ليكن $V_{s,t}$ الفضاء ذو 2- بعد $e_t \oplus e_s$.

تمهيدية 16.2 إن مقصور B لـ $V_{s,t}$ موجب تقريباً، ويكون موجب تماماً إذا كان $m(s,t) \neq \infty$.

البرهان. ليكن $v = ae_s + be_t \in V_{s,t}$. إذا كان $m(s,t) \neq \infty$، عندئذٍ

$$B(v,v) = a^2 - 2ab\cos(p/m) + b^2$$

$$= \left(a - b\cos(p/m)\right)^2 + b^2\sin^2(p/m) > 0$$

لأن $\sin(p/m) \neq 0$. إذا كان $m(s,t) = \infty$، عندئذٍ

$$\mathrm{B}(v,v) = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \geq 0$$

تمهيدية 17.2 المقصور من st إلى $V_{s,t}$ له الرتبة $m(s,t)$.

البرهان. إذا كان $m(s,t) \neq \infty$، فإن الشكل $B|V_{s,t}$ موجب تماماً، ولذلك $(V_{s,t}, B|V_{s,t})$ هو فضاء إقليدي. علاوةً على ذلك، s_s و s_t انعكاسات على $V_{s,t}$ في حالات (13.2) معرف بالمتجهين e_s و e_t. كما أن $B(e_s,e_t) = -\cos(p/m(s,t)) = \cos(p - p/m(s,t))$، الزاوية بين المستقيمات المثبتة بـ e_s و e_t تساوي $p/m(s,t)$. من (16.1)، نرى بأن s_s و s_t تولدان زمرة ديهيدرال $D_{m(s,t)}$ و أن $s_s s_t$ من الرتبة $m(s,t)$.

إذا كان $m(s,t) = \infty$، عندئذٍ المصفوفتان لـ s_s و s_t بالنسبة إلى القاعدة $\{e_s, e_t\}$ الموجودة في (12.2)، من ذلك ينتج بأن $s_s s_t$ من رتبة غير منتهية.

بما أن رتبة st تقسم رتبة $m(s,t)$، فالتمهيدية تبين بأنه يساوي $m(s,t)$.

ملاحظة 18.2 إن التشاكل $G \to \mathrm{GL}(V)$ في برهان المبرهنة 2.12 غامر (Humphreys 1990, 5.4)، ولكن من الصعب برهانه.

تمارين

2-1 برهن أن الزمرة التي لها المولدات $a_1,...,a_n$ والعلاقات $[a_i,a_j] = 1, i \neq j$، هي زمرة تبديلية حرة على $a_1,...,a_n$. [استخدم الخواص العامة Hinit].

2-2 ليكن a و b عنصرين من زمرة اختيارية حرة F. برهن أن:

(a) إذا كان $a^n = b^n$ مع $n > 1$، عندئذٍ $a = b$.

(b) إذا كان $a^m b^n = b^n a^m$ مع $mn \neq 0$، عندئذٍ $ab = ba$.

(c) إذا كان للمعادلة $x^n = a$ الحل x لكل n، عندئذٍ $a = 1$.

2-3 ليكن F_n يرمز لزمرة حرة على n مولد. برهن:

(a) إذا كان $n < m$، عندئذ F_n تتماثل مع كل من الزمرة الجزئية وزمرة القسمة لـ F_m.

(b) برهن أن $F_1 \times F_1$ ليست زمرة حرة.

(c) برهن أن المركز $Z(F_n) = 1$ صحيح من أجل $n > 1$.

2-4 برهن أن Q_n (انظر 2.7b) تحوي على زمرة جزئية وحيدة من الرتبة 2، والتي هي $Z(Q_n)$. برهن بأن $Q_n / Z(Q_n)$ متماثلة مع $D_{2^{n-1}}$.

2-5 (a) لتكن $G = \langle a,b; a^2, b^2, (ab)^4 \rangle$. برهن أن G تماثل زمرة ديهيدرال D_4.

(b) برهن أن $G = \langle a,b; a^2, abab \rangle$ زمرة غير منتهية. (هذه تعرف عادةً بزمرة ديهيدرال غير المنتهية).

2-6 لتكن $G = \langle a,b,c; a^3, b^3, c^4, acac^{-1}, aba^{-1}bc^{-1}b^{-1} \rangle$. برهن أن G هي الزمرة التافهة $\{1\}$. [Hinit Expand $(aba^{-1})^3 = (bcb^{-1})^3$].

2-7 لتكن F زمرة حرة على المجموعة $\{x, y\}$ ولتكن $G = C_2$، مع المولد $a \neq 1$. وليكن a التشاكل $F \to G$ بحيث يكون $a(x) = a = a(y)$. أوجد المجموعة المولدة الأصغرية لنواة a. وهل النواة زمرة حرة؟

2-8 لتكن $G = \langle s,t; t^{-1}s^3t = s^5 \rangle$. برهن أن العنصر

$$g = s^{-1}t^{-1}s^{-1}tst^{-1}st$$

ينتمي إلى نواة كل تطبيق من الزمرة G إلى زمرة منتهية.

الفصل الثالث

التماثلات الذاتية والتمديدات

Automorphisms and extensions

التماثلات الذاتية للزمر(Automorphisms of groups)

إن التماثل الذاتي (Automorphism) لزمرة G هو تماثل من هذه الزمـــرة إلـــى نفـــسها. المجموعة $Aut(G)$ من التماثلات الذاتية للزمرة G تصبح زمرة بالنسبة لعمليـــة تركيـــب التطبيقات: إن تركيب تماثلين ذاتيين هو تماثل ذاتي أيضاً، تركيب التطبيقـــات هـــو عمليـــة تجميعية دوماً (انظر (5))، التطبيق المطابق $g \mapsto g$ هو العنصر المحايد، التماثل الـــذاتي يكون تقابلاً، وبالتالي سيكون له معكوس، والذي هو أيضاً تماثل ذاتي.

لكل $g \in G$، التطبيق i_g "الترافق بالنسبة لـــ g"،

$$x \mapsto gxg^{-1} : G \to G$$

هو تماثل ذاتي لـــ G. يسمى التماثل الذاتي من هذا الشكل بالتماثل الذاتي الـــداخلي (inner Automorphisms)، أمـــا التماثـــل الآخـــر فيـــسمى بالتماثـــل الخـــارجي (outer Automorphisms).

نلاحظ أن

$$(gh)x(gh)^{-1} = g\left(hxh^{-1}\right)g^{-1} \text{، أي أن } i_{gh}(x) = \left(i_g \circ i_h\right)(x)$$

ولذلك فإن التطبيق $g \mapsto i_g : G \to Aut(G)$ تشاكل. يرمز لصورته بالشكل $\mathrm{Inn}(G)$. نواته هي مركز G،

$$Z(G) = \{g \in G ; gx = xg \,,\ \forall x \in G\}$$

وبهذا نحصل من (1. 44) على التماثل

$$G/Z(G) \to \mathrm{Inn}(G)$$

في الحقيقة، إن $\mathrm{Inn}(G)$ هو زمرة جزئيـــة ناظميـــة فـــي $\mathrm{Aut}(G)$: لكـــل $g \in G$ و $a \in \mathrm{Aut}(G)$،

$$\left(a \circ i_g \circ a^{-1}\right)(x) = a\left(g.a^{-1}(x).g^{-1}\right) = a(g).x.a(g)^{-1} = i_{a(g)(x)}$$

مثال 1.3 (a) لتكن $G = \mathrm{F}_n^p$. إن التماثلات الذاتية للزمرة G كالزمر التبديلية هي تماماً التماثلات الذاتية للزمرة G كالفضاء المتجهي على F_p، لـذلك $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_p)$.

بما أن G تبديلية، عندئذ كل التماثلات غير التافهة في G ستكون خارجية.

(b) كذلك الحالة الخاصة لـ (a)، نرى بأن

$$\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) = \mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_2).$$

(c) بما أن مركز الزمرة الرباعية Q هي $\langle a^2 \rangle$، عندئذٍ يكون لدينا

$$\mathrm{Inn}(Q) \quad Q/\langle a^2 \rangle \approx C_2 \times C_2$$

في الحقيقة، $\mathrm{Aut}(Q) \approx S_4$. انظر التمرين 3-5.

الزمر التامة (Complete groups)

تعريف 2.3 تكون الزمرة تامة (Complete) إذا كان التطبيق $g \mapsto i_g : G \to \mathrm{Aut}(G)$ تماثلاً.

لذلك، تكون الزمرة تامة إذا وفقط إذا كان (a) المركز $Z(G)$ للزمرة G تافهاً، و (b) كل تماثل ذاتي للزمرة G يكون داخلياً.

مثال 3.3 (a) لكل $n \neq 2,6$، S_n زمرة تامة. بما أن الزمرة S_2 تبديلية وبالتالي (a) لا يتحقق، $\mathrm{Aut}(S_6)/\mathrm{Inn}(S_6) \approx C_2$ وبالتالي S_6 لا يحقق (b). انظر Rotman 1995، المبرهنة 7.5,7.10.

(b) إذا كانت G زمرة تبديلية غير بسيطة، عندئذٍ $\mathrm{Aut}(G)$ تامة. انظر Rotman 1995، المبرهنة 7.14.

من التمرين 3-4، $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_2) \approx S_3$، وبالتالي فإن الزمر غير المتماثلة $C_2 \times C_2$ و S_3 تحوي على زمر متماثلة من التماثلات الذاتية.

التماثلات الذاتية الزمر الدائرية (Automorphisms of cyclic groups)

لتكن G زمرة دائرية من الرتبة n، ولتكن $G = \langle a \rangle$. ليكن m عدداً صحيحاً ≤ 1. إن المضاعف الأصغر للعدد m الذي يقبل القسمة على n هو $m.\frac{n}{\gcd(m,n)}$. لذلك، a^m من الرتبة $\frac{n}{\gcd(m,n)}$، وبالتالي فإن مولدات G هي تماماً العناصر a^m و

$\gcd(m,n)=1$. التماثل الذاتي a للزمرة G يجب أن يرسل a إلى مولد آخر للزمــرة G، وبالتالي $a(a)=a^m$ لمجموعة من العناصر m الأولية نــسبياً مــع n. التطبيــق $m \quad \mathbf{a} \quad a$ يعرف تماثلاً

$$\mathrm{Aut}(C_n)\to(\mathbf{Z}/\mathbf{n}\mathbf{Z})^{\times}$$

حيث

$$(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}=\{\text{عناصر الوحدة في الحلقة } \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\mathrm{h}\}=\{m+n\mathbf{Z},\gcd(m,n)=1\}$$

يعتمد هذا التماثل على اختيار المولدات a للزمرة G: إذا كان $a(a)=a^m$، عندئذٍ من أجل أي عنصر آخر $b=a^i$ للزمرة G،

$$a(b)=a(a^i)=a(a)^i=a^{mi}=(a^i)^m=(b)^m$$

بقي أن نحدد $(\mathbf{Z}/\mathbf{n}\mathbf{Z})^{\times}$. إذا كان $n=p_1^{r_1}...p_s^{r_s}$ تحليل n إلى جداء قــوى لأعــداد أولية، عندئذٍ

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \quad \mathbf{Z}/p_1^{r_1}\mathbf{Z}\times...\times\mathbf{Z}/p_s^{r_s}\mathbf{Z},\ m \bmod n\leftrightarrow(m \bmod p^{r_1},...)$$

حسب مبرهنة البواقي الصينية. فإن هذا عبارة عن تماثل حلقات، ولذلك

$$(\mathbf{Z}/\mathbf{n}\mathbf{Z})^{\times} \quad (\mathbf{Z}/\mathbf{p}_1^{r_1}\mathbf{Z})^{\times}\times...\times(\mathbf{Z}/\mathbf{p}_s^{r_s}\mathbf{Z})^{\times}$$

بقي أن نأخذ الحالة التي يكون فيها $n=p^r$، p أولي.

نفرض أولاً أن p عدد فردي. المجموعة $\{0,1,...,p^r-1\}$ مجموعة تامة من ممثلات $\mathbf{Z}/p^r\mathbf{Z}$، و $\frac{1}{p}$ من هذه العناصر القابلة للقسمة علــى p. وبالتــالي $(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}$ مــن الرتبة $p^r-\frac{p^r}{p}=p^{r-1}(p-1)$. لأن $p-1$ و p^r أوليان نسبياً، نحن نعلم مــن (12) بأن $(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}$ متماثل مع الجداء المباشر للزمرة A من الرتبة $p-1$ والزمرة B من الرتبةp^r-1. من التطبيق

$$(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}\to(\mathbf{Z}/\mathbf{p}\mathbf{Z})^{\times}=\mathrm{F}_p^{\times}$$

ينتج التماثل $A\to\mathrm{F}_p^{\times}$، و من كون $\mathrm{F}_p^{\times}$، زمرة جزئية منتهية من الزمرة الضربية للحقــل، وهي زمرة دائرية (1.55). لذلك $(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}\supset A=\langle x\rangle$ من أجل مجموعة من العناصر x من الرتبة $p-1$. باستخدام نظرية ذي الحدين، نجد أولاً بأن $1+p$ من الرتبــة p^{r-1} في $(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}$، وبالتالي فهو يولد B. وبهذا تكون $(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}$ دائرية، مــع مولــدها $x.(1+p)$، ويمكن أن يكتب كل عنصر وبشكل وحيد بالشكل

$$x^i.(1+p)^j\ ,\ 0\le i<p-1, 0\le j<p^{r-1}$$

من جهة أخرى

$$(\mathbf{Z}/8\mathbf{Z})^{\times}=\{\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}\}=\langle\bar{3},\bar{5}\rangle\approx C_2\times C_2$$

ليست دائرية.

الملخص 4.3 (a) لكل زمرة دائرية في G مـــن الرتبـــة n، $\mathrm{Aut}(G)\to(\mathbf{Z}/\mathbf{n}\mathbf{Z})^{\times}$.
التماثل الذاتي في G يقابل $[m]\in(\mathbf{Z}/\mathbf{n}\mathbf{Z})^{\times}$ يرسل العنصر a في G إلى a^m.

(b) إذا كان $n=p_1^{r_1}...p_s^{r_s}$؛ تحليل n إلى جداء قوى لأعداد أولية p_i، عندئذٍ

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\quad \mathbf{Z}/p_1^{r_1}\mathbf{Z}\times...\times\mathbf{Z}/p_s^{r_s}\mathbf{Z},\ m \bmod n\leftrightarrow(m \bmod p^{r_1},...)$$

(c)

$$(\mathbf{Z}/\mathbf{p}^r\mathbf{Z})^{\times}\approx\begin{cases}C_{(p-1)p^{r-1}} & p \text{ فردي}\\ C_2 & p^r=2^2\\ C_2\times C_{2^{r-2}} & p=2, r>2\end{cases}$$

الزمر الجزئية المميزة (Characteristic subgroups)

تعريف 5.3 الزمرة الجزئية المميزة (Characteristic subgroup) في الزمـــرة G هـــي الزمرة H التي تحقق $a(H)=H$ لكل تماثل ذاتي a من الزمرة G.

وبنفس الترتيب في (31.1) يكفي أن نبرهن بأن $a(H)\subset H$ لكل $a\in Aut(G)$.
لهذا، تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G إذا كانت ثابتة بالنسبة لكل تماثل داخلي فـــي G، وتكون مميزة إذا كانت ثابتة بالنسبة لكل التماثلات الذاتية. بشكل خـــاص، إن الزمـــرة الجزئية المميزة هي زمرة ناظمية.

ملاحظة 6.3 (a) نأخذ الزمرة G والزمرة الناظمية N. إن التماثل الذاتي الداخلي للزمـــرة G يحدد تماثلاً ذاتياً للزمرة N، والذي من الممكن أن يكون خارجياً (مثال علـــى ذلـــكً، انظر 15.3). لذلك الزمرة الجزئية الناظمية في N ليست بالضرورة أن تكون ناظمية فـــي G. أيضاً الزمرة الجزئية المميزة من زمرة جزئية مميزة هي زمرة جزئية مميزة.

(b) المركز $Z(G)$ للزمرة G هو زمرة جزئية مميزة، لأن

$$zg = gz\,,\ \forall g \in G \Rightarrow a(z)a(g) = a(g)a(z),\ \ \forall g \in G$$

وكما أن g يمسح كل G، $a(g)$ أيضاً يمسح كل G. باستثناء الزمر الجزئية مع تعريف نظرية الزمر العامة لكي تكون مميزة.

(c) إذا كانت H الزمرة الجزئية الوحيدة من الرتبة m، عندئذٍ يجب أن تكون مميـــزة، لأن $a(H)$ هو أيضاً زمرة جزئية في G من الرتبة m.

(d) كل زمرة جزئية من زمرة تبديلية تكون ناظمية لكن ليس من الضروري أن تكـــون مميزة. مثلاً، الفضاء الجزئي من البعد 1 في $G = \mathrm{F}_p^2$ لن يكون ثابتاً بالنـــسبة $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_p)$ وبالتالي لا يكون زمرة جزئية مميزة.

الجداءات شبه المباشرة (Semidirect products)

لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G. عندئذ كل عنصر $g \in G$ يعرف تشاكلاً ذاتياً لـــــ N، $n \mapsto gng^{-1}$، وهذا يعرف التشاكل

$$q : G \to Aut(N),\ g \mapsto i_g \,|\, N$$

إذا وجدت زمرة جزئية Q في G بحيث إن $G \to G/N$ يغمر Q تحت سقف التماثـــل في G/N، عندئذٍ أدعي بأنه يمكننا أن نعيد بناء G من Q و N، والمقصور لـــــ q على Q. وبالإضافة لذلك يمكن أن نكتب العنصر $g \in G$ وبشكل وحيد بالشكل

$$g = nq,\ n \in N\,,\ q \in Q$$

يجب أن يكون q هو العنصر الوحيد في Q يطابق $gN \in G/N$، و n يجب أن يساوي gq^{-1}. لهذا، يكون لدينا التطبيق التقابل

$$G \xleftrightarrow{1-1} N \times Q$$

إذا كان $g = nq$ و $g' = n'q'$، عندئذٍ

$$gg' = (nq)(n'q') = n\left(qn'q^{-1}\right)qq' = n.q(q)(n').qq'$$

تعريف 7.3 تكون الزمرة G جداء شبه مباشر (Semidirect products) للزمرتين N و Q إذا كانت N ناظمية ومن $G \to G/N$ ينتج التماثل $Q \to G/N$.

بشكل مكافئ، تكون G جداء شبه مباشر للزمرتين N و Q إذا كان

$$N \lhd G;\ \ NQ = G;\ \ N \cap Q = 1$$

نلاحظ بأنه ليس من الضروري أن تكون Q زمرة جزئية ناظمية في G. عندما تكون G جداء شبه مباشر للزمرتين N و Q، نكتب $G = N \times_q Q$ (حيث $q : Q \to Aut(N)$ تعطي تأثير Q على N بتماثل ذاتي داخلي.

مثال 8.3 (a) في D_n ، $n \geq 2$ ، ليكن $C_n = \langle r \rangle$ و $C_2 = \langle s \rangle$، عندئذٍ

$$D_n = \langle r \rangle \times_q \langle s \rangle = C_n \times_q C_2$$

حيث $q(s)(r^i) = r^{-i}$ (انظر 1.16).

(b) الزمرة المتناوبة A_n زمرة جزئية ناظمية في S_n (لأن دليلها يساوي 2)، و $Q = \{(12)\}$ تغمر في S_n / A_n (تحت سقف التماثل). بهذا تكون $S_n = A_n \times_q C_2$.

(c) إن الزمرة الرباعية لا يمكن أن تكتب على شكل جداء شبه مباشر بأي طريقة غير تافهة (انظر التمرين 3-2).

(d) الزمرة الدائرية من الرتبة p^2 ، p أولي، لا تشكل جداء شبه مباشر (لأنها تحوي زمرة جزئية وحيدة فقط من الرتبة p).

(e) لتكن $G = \mathrm{GL}_n(F)$. لتكن B زمرة جزئية من زمرة المصفوفات المثلثية العليا في G، T زمرة جزئية من زمرة المصفوفات القطرية في G، U زمرة جزئية من زمرة المصفوفات المثلثية العليا حيث كل معاملاتها القطرية تساوي العدد 1. عندئذ، بفرض $n = 2$،

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},\ T = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\},\ U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

فإن U زمرة جزئية ناظمية في B ، $UT = B$، و $U \cap T = \{1\}$. لذلك،

$$B = U \times_q T$$

نلاحظ، عندما $n \geq 2$ ، فإن تأثير T على U ليس تافهاً، مثلاً،

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ac/b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ولذلك فإن B ليس جداءً شبه مباشر لـ T و U.

لقد رأينا بأنه، من الجداء شبه المباشر $G = N \times_q Q$، نحصل على الثلاثية

$$(N, Q, q : Q \to Aut(N))$$

وأن الثلاثية تحدد G. نبرهن الآن بأن كل ثلاثية (N, Q, q) تتألف من الزمرتين N و Q وعلى التشاكل $q : Q \to Aut(N)$ الذي يأتي من الجداء شبه المباشر. كمجموعة، لتكن $G = N \times Q$، ولنعرف

$$(n, q)(n', q') = (n q(q)(n'), qq')$$

قضية 9.3 إن قانون التركيب السابق يجعل من G زمرة وهي، في الحقيقة، الجداء شبه المباشر للزمرتين N و Q.

البرهان. نكتب q_n بدلاً من $q(q)(n)$، لذلك يصبح قانون التركيب بالشكل

$$(n,q)(n',q')=(n.q_{n'},qq')$$

عندئذٍ

$$(n,q)(n',q')(n'',q'')=(n.q_{n'}.qq'_{n''},qq'q'')=(n,q)\left((n',q')(n'',q'')\right)$$

ولهذا فإن قانون التجميع محقق. لأن $q(1)=1$ و $q(q)(1)=1$

$$(1,1)(n,q)=(n,q)=(n,q)(1,1)$$

ولذلك فإن $(1,1)$ هو العنصر المحايد. بالتالي

$$(n,q)\left(q_{n^{-1}}^{-1},q^{-1}\right)=(1,1)=\left(q_{n^{-1}}^{-1},q^{-1}\right)(n,q)$$

لذلك فإن $\left(q_{n^{-1}}^{-1},q^{-1}\right)$ هو معكوس العنصر (n,q)، إذاً G زمــرة، ومــن الواضــح أن $N \triangleleft G,\ NQ=G$ و $N \cap Q=1$، وبالتالي $G=N\times_q Q$ علاوةً على ذلك، عنــدما تعتبر كل من N و Q زمرتين جزئيتين من G، فإن تأثير Q على N معطى بـــ q.

أمثلة10.3 الزمرة من الرتبة 12. ليكن q التشاكل غير التافه (الوحيد)

$$C_4 \to Aut(C_3) \quad C_2$$

بالتحديد، ذلك الذي يرسل مولد C_4 إلى التطبيق $a \mapsto a^2$. عندئذٍ $G\overset{\text{def}}{=}C_3\times_q C_4$ زمــرة غير تبديلية من الرتبة 12، ليست متماثلة مع A_4. إذا رمزنا لمولدات C_3 و C_4 بـــالرموز a و b، عندئذٍ a و b يولدان G، وتكون لدينا العلاقات المعرفة

$$a^3=1,\ b^4=1,\ bab^{-1}=a^2$$

11.3 الجداءات المباشرة (Direct product). التقابل للمجموعات

$$(n,q)\mapsto(n,q): N\times Q\to N\times_q Q$$

يكون تماثلاً من الزمر إذا وفقط إذا كـــان q التـــشاكل التافـــه $Q\to Aut(N)$، أي أن، $q(q)(n)=n$ لكل $q\in Q, n\in N$.

12.3 الزمر من الرتبة 6. إن كلاً من S_3 و C_6 جداء شبه مباشر للزمرة C_3 على C_2 - تقابلان التشاكلين $Aut(C_3) \quad C_2\to C_2$.

13.3 الزمر من الرتبة p^3 (العنصر من الرتبة p^2). لتكن $N=\langle a\rangle$ زمرة دائرية من الرتبة p^2، ولتكن $Q=\langle b\rangle$ زمرة دائرية من الرتبة p، حيث p عدد أولـــي فـــردي. عندئذٍ $\operatorname{Aut}N\approx C_{p-1}\times C_p$ (انظر 4.3)، و C_p مولد بـــــ $a:a\mapsto a^{1+p}$ (نلاحـــظ أن

$(a^2(a)=a^{1+2p},...)$. نعـــــرف $Q \to \text{Aut}(N)$ بالـــــشكل $a \mapsto a$ b. الزمـــــرة $G \overset{\text{def}}{=} N \times_q Q$ مولداتها a,b و علاقاتها المعرفة

$$a^{p^2}=1,\ b^p=1,\ bab^{-1}=a^{1+p}$$

هي زمرة غير تبديلية من الرتبة p^3، وتحوي على عنصر من الرتبة p^2.

14.3 الزمر من الرتبة p^3 (لا تحوي على عنصر من الرتبة p^2). لـــتكن $N=\langle a,b\rangle$ الجداء المباشر للزمرتين الدائريتين $\langle a\rangle$ و $\langle b\rangle$ من الرتبة p، ولـــتكن $Q=\langle c\rangle$ زمـــرة دائرية من الرتبة p. نعرف $q:Q\to \text{Aut}(N)$ كي يكون تشاكلاً، بحيث

$$q(c^i)(a)=ab^i,\ q(c^i)(b)=b$$

(إذا عينا N كزمرة جمعية $N=\mathbb{F}_p^2$ مع a,b عناصر القاعدة القانونية، عندئــذٍ $q(c^i)$ هو تماثل ذاتي على N المعرفة بالمصفوفة $\begin{pmatrix}1&0\\ i&1\end{pmatrix}$). الزمرة $G \overset{\text{def}}{=} N \times_q Q$ زمرة مــن الرتبة p^3، مولداتها a,b,c وعلاقاتها معرفة بالشكل

$$a^p=b^p=c^p=1,\ ab=cac^{-1},\ [b,a]=1=[b,c]$$

لأن $b\neq 1$، إن المساواة الوسطى تبين بأن الزمرة ليست تبديلية. عندما يكون p فردياً، فإن كل العناصر ستكون من الرتبة p باستثناء العنــصر 1. عنــدما $p=2, G\approx D_4$، الــذي يحتوي على عنصر من الرتبة 2^2. هذا يبين لنا بأنه يمكن أن يكون للزمرة تمثيلات مختلفــة تماماً كزمرة الجداء شبه المباشر:

$$D_4 \overset{3.8a}{\approx} C_4\times_q C_2 \approx (C_2\times C_2)\times_q C_2$$

لكل عدد أولي فردي p، تكون الزمرة غير التبديلية من الرتبة p^3 متماثلة مع الزمـــرة في (13.3) إذا حوت على عنصر من الرتبة p^2 وتكون متماثلة مع الزمرة في (14.3) إذا لم تحوي على عنصر كهذا (انظر التمرين 4-3). بشكل خاص، تحت سقف التماثـــل، توجـــد زمرتان غير تبديليتين فقط من الرتبة p^3.

15.3 جعل التماثل الذاتي الخارجي داخلياً. ليكن a تماثلاً ذاتياً، مـــن الممكـــن أن يكـــون خارجياً، للزمرة N. إن N زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G بطريقة ما بحيث يـــصبح a مقصوراً للتماثل الذاتي الداخلي للزمرة G على الزمـــرة N. لبرهـــان ذلـــك، لـــيكن $q:C_\infty\to \text{Aut}(N)$. تشاكلاً يرسل المولد a من C_∞ إلـــى $a\in \text{Aut}(N)$ و لـــتكن $G=N\times_q C_\infty$. العنـــــصر $g=(1,a)$ مـــــن الزمـــــرة G يحقـــق الخاصـــة $g(n,1)g^{-1}=(a(n),1)$، لكل $n\in N$.

قاعدة لتحويل الجداءات شبه المباشرة إلى تماثل (Making outer automorphisms inner)

سيكون مفيداً لنا بأن يكون لدينا قاعدة وذلك عندما تحدد الثلاثيتان (N,Q,q) و (N,Q,q') زمراً متماثلة.

تمهيدية 16.3 إذا كان q و q' مترافقين، أي أنه يوجد $a \in \mathrm{Aut}(N)$، بحيث يكون $q'(q) = a \circ q(q) \circ a^{-1}$ لكل $q \in Q$، عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q$$

البرهان. نأخذ التطبيق

$$g : N \times_q Q \to N \times_{q'} Q,\ \ (n,q) \mapsto (a(n),q)$$

عندئذٍ

$$\begin{aligned} g(n,q).g(n',q') &= (a(n),q).(a(n'),q') \\ &= \left(a(n).q'(q)(a(n')),qq'\right) \\ &= \left(a(n).\left(a \circ q(q) \circ a^{-1}\right)(a(n')),qq'\right) \\ &= \left(a(n).a\left(q(q)(n')\right),qq'\right), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} g\left((n,q).(n',q')\right) &= g\left(n.q(q)(n'),qq'\right) \\ &= \left(a(n).a\left(q(q)(n')\right),qq'\right) \end{aligned}$$

ومنه فإن g تشاكل زمري، معكوسه $(n,q) \mapsto \left(a^{-1}(n),q\right)$، وبالتالي فهو تماثل زمري.

تمهيدية 17.3 إذا كان $q = q' \circ a$، حيث $a \in \mathrm{Aut}(Q)$، عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q .$$

البرهان. إن التطبيق $(n,q) \mapsto (n,a(q))$ هو تماثل $N \times_q Q \to N \times_{q'} Q$.

تمهيدية 18.3 إذا كانت Q دائرية و الزمرة الجزئية $q(Q)$ من $\mathrm{Aut}(N)$ مترافقة مع $q'(Q)$، عندئذٍ

$$N \times_q Q \approx N \times_{q'} Q .$$

البرهان. ليكن a مولد للزمرة Q، عندئذٍ يوجد العدد i و $a \in \mathrm{Aut}(N)$ بحيث يكون

$$q'\left(a^{i}\right)=a.q\left(a\right).a^{-1}.$$

التطبيق $\left(a\left(n\right),q^{i}\right) \mapsto \left(n,q\right)$ هو التماثل $N \times_{q} Q \to N \times_{q'} Q$.

تمديدات الزمر (Extensions of groups)

إن المتتالية من الزمر و التشاكلات

$$1 \to N \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ p\ } 1$$

تكون تامة إذا كان i متبايناً، و p غامراً، و $\mathrm{Ker}(p)=\mathrm{Im}(i)$. لذلك $i(N)$ زمرة جزئية ناظمية في G

(تماثل بالنسبة لـ i للزمرة N) و $G/i(N) \longrightarrow Q$. غالباً ما نطابق N مع الزمرة الجزئية $i(N)$ في G و Q مع زمرة القسمة G/N.

إن المتتالية التامة السابقة تشير أيضاً بأنها تمثل تمديداً (Extension) للزمرة Q بالزمرة N (وأيضاً تشكل تمديداً للزمرة N بالزمرة Q عند بعض المؤلفين). يكون التمديد مركزياً (central) إذا كان $i(N) \subset Z(G)$. مثلاً، الجداء شبه المباشر $N \times_{q} Q$ يتحول إلى تمديد للزمرة Q بالزمرة N،

$$1 \to N \to N \times_{q} Q \to Q \to 1$$

الذي يكون مركزياً إذا وفقط إذا كان q تشاكلاً تافهاً.

يقال عن تمديدا الزمرة Q بالزمرة N أنهما متماثلان إذا وجد مخططاً تبادلياً

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & N & \to & G & \to & Q & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow{\approx} & & \| & & \\
1 & \to & N & \to & G' & \to & Q & \to & 1
\end{array}$$

يقال بأن تمديد Q بـ N،

$$1 \to N \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ p\ } 1$$

منفصلاً (split) إذا كان متماثلاً مع التمديد المعرف بالجداء شبه المباشر $N \times_{q} Q$.

الشرطان الآتيان متكافئان:

(a) يوجد زمرة جزئية $Q' \subset G$ بحيث إن p يعطي التماثل $Q' \to Q$، أو

(b) يوجد تشاكل $s: Q \to G$ بحيث يكون $p \circ s = \mathrm{id}$.

في الحالة العامة، لن يكون التمديد منفصلاً. مثلاً، التمديد

$$1 \to N \to Q \to Q/N \to 1$$

حيث N أي زمرة جزئية من الرتبة 4 في الزمرة الرباعية Q و

$$1 \to C_p \to C_{p^2} \to C_p \to 1$$

ليس منفصلاً. نستعرض قاعدتين لكي يكون التمديد منفصلاً.

مبرهنة 19.3 (Schur – Zassenhaus) إن تمديد الزمر المنتهية التي رتبها أعداد أولية نسبياً يكون منفصلاً.

البرهان. Rotman 1995, 7.41.

قضية 20.3 لتكن N زمرة جزئية ناظمية في الزمرة G، إذا كانت N تامة، عندئذٍ فإن N جداء مباشر للزمرة N مع ممركز N في G،

$$C_G(N) \overset{\text{def}}{=} \{ g \in G \mid gn = ng \ , \ \forall n \in N \}$$

البرهان. لتكن $Q = C_G(N)$. سنبين بأن N و Q تحققان شروط القضية 50.1.

نلاحظ أولاً بأنه، $N \to N: gng^{-1} \mapsto n$ لكل $g \in G$ تماثل ذاتي للزمرة N، و (لأن N تامة)، يجب أن يكون التماثل الذاتي الداخلي معرفاً بعنصر g في N، لهذا

$gng^{-1} = g\,ng^{-1}$، لكل $n \in N$

تبين المعادلة السابقة بأن $g^{-1}g \in Q$، وبالتالي $g = g\left(g^{-1}g\right) \in NQ$. بما أن g اختياري، نكون قد بينا بأن $G = NQ$.

نلاحظ فيما يلي بأن كل عنصر من $N \cap Q$ ينتمي إلى مركز N، الذي يكون تافهاً (لأن N تامة)، وبالتالي $N \cap Q = 1$.

أخيراً، لأي عنصر $g = nq \in G$،

$$gQg^{-1} = n\left(qQq^{-1}\right)n^{-1} = Q$$

(نتذكر بأن كل عنصر من N يتبادل مع كل عنصر من Q). لذلك فإن Q ناظمية في G.

إن التمديد

$$1 \to N \to G \to Q \to 1$$

يعطي التشاكل $q' : G \to \mathrm{Aut}(N)$، وبالتحديد،

$$q'(g)(n) = gng^{-1}$$

ليكن $\tilde{q} \in G$ يرسل إلى q في Q وفق التطبيق q، عندئذٍ الصورة $q'(\tilde{q})$ في $\mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Inn}(N)$ تعتمد على q فقط، لذلك نحصل على التشاكل

$$q : Q \to \operatorname{Out}(N) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Aut}(N) / \operatorname{Inn}(N)$$

يعتمد التطبيق q فقط على الصفوف المتماثلة للتمديدات، ونكتب $\operatorname{Ext}^1(Q,N)_q$ لمجموعة الصفوف المتماثلة للتمديدات مع q. لقد درست هذه المجموعات على نطاق واسع.

عندما تكون N و Q تبديليتين و q تافهاً، تكون الزمرة G تبديلية أيضاً، وتوجد زمرة تبديلية تبنى فوق $\operatorname{Ext}^1(Q,N)$. علاوةً على ذلك، فإن التشاكلات الذاتية للزمرتين N و Q تؤثر كتأثير التشاكلات الذاتية على $\operatorname{Ext}^1(Q,N)$. كحالة خاصة، بالضرب بـ m فوق N أو Q ينتج الضرب بـ m فوق $\operatorname{Ext}^1(Q,N)$. لهذا، إذا كانت N و Q مختزلتين على m و n على الترتيب، عندئذٍ يكون $\operatorname{Ext}^1(Q,N)$ مختزلاً على m و n، وبالتالي يكون مختزلاً على $\gcd(m,n)$. هذا يثبت مبرهنة Schur – Zassenhaus في هذه الحالة.

مخطط هولدر (The Holder program).

سأولي الاهتمام الأكبر إذا كان من الممكن
إعطاء نظرة عامة على مجموعة كاملة من
الزمر البسيطة المنتهية.
Otto Holder, Math. Ann., 1892

نتذكر بأن G تكون زمرة بسيطة عندما لا تحوي على زمر جزئية ناظمية غير الزمرتين 1 و G. بكلمات أخرى، تكون الزمرة G بسيطة إذا لم تكن تمديداً لزمر أصغر منها. كل زمرة منتهية يمكن أن يحصل عليها بأخذ تمديدات مكررة لزمر بسيطة. لهذا يمكن أن تعتبر الزمر المنتهية البسيطة كقاعدة لبناء خلايا لجميع الزمر المنتهية.

إن مشكلة تصنيف الزمر البسيطة تقع في جزأين:

A . تصنيف جميع الزمر البسيطة المنتهية،

B . تصنيف جميع تمديدات الزمر المنتهية.

تصنيف الزمر المنتهية البسيطة (Classification of finite simple groups)

توجد قائمة كاملة من الزمر المنتهية البسيطة. وهي

(a) الزمر الدائرية التي رتبها عدداً أولياً،

(b) الزمر المتناوبة A_n لكل $n \geq 5$ (انظر الفصل الآتي)،

(c) مجموعات محددة غير منتهية من زمر المصفوفات، و

(d) "الزمر المتفرقة" 26

إن الصف الأكبر هو (c)، لكن "الزمر المتفرقة" 26 تأخذ اهتماماً أكثر من عددها الصغير الذي يمكن أن يكون مقترحاً. البعض ليس لديه إلا تصورات بأنها أكبر منهم، السيد Fischer-Griess، يكون قد انتقل إلى تركيب أكثر من مجموعة.

وكمثال على زمرة المصفوفات، نأخذ

$$\mathrm{SL}_m\left(\mathrm{F}_q\right) \overset{\text{def}}{=} \left\{m \times m,\ A \in \mathrm{F}_q\ ,\ \det A = 1\right\}$$

هنا $q = p^n$، p أولي، و F_q الحقل مع q عنصر. هذه الزمرة لن تكون بسيطة إذا كان $q \neq 2$، لأن المصفوفة السلمية $x^m = 1$, $\begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & x \end{pmatrix}$، تكون في المركز من أجل أي m الذي يقسم $q-1$، لكن هذه، هي المصفوفات التي في المركز فقط، وتكون الزمر

$$\mathrm{PSL}_m\left(\mathrm{F}_q\right) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{SL}_n\left(\mathrm{F}_q\right) / \{\text{المركز}\}$$

بسيطة عندما يكون $m \geq 3$ (Rotman 1995, 8.23) وعندما $m = 2$ و $q > 3$ (ibid. 8.13). من أجل الحالة التي يكون فيها $m = 3$ و $q = 2$، انظر التمرين 6-4 (نلاحظ بأن $\mathrm{GL}\left(\mathrm{F}_2\right)$ $\mathrm{PSL}_3\left(\mathrm{F}_2\right)$). يمكن أن نحصل على زمر بسيطة منتهية أخرى من الزمر في (8.1).

B تصنيف كل تمديدات الزمر المنتهية

أصبح معروفاً لنا الكثير عن تمديدات الزمر المنتهية، فمثلاً، تمديد زمرة بسيطة واحدة بزمرة أخرى. علاوة على ذلك، كتب Solomon (2001,p347):

> ... إن تصنيف كل الزمر المنتهية غير قابل للتطبيق بشكل تام. ولا توجد خبرات سابقة تبين بأن معظم الزمر المنتهية التي توجد في "الطبيعة" ... تكون "مغلقة" إما بالنسبة للزمر البسيطة أو بالنسبة لزمر ما كزمر ديهيدرال، وزمر هيسينبيرغ، الخ...، والتي تأتي بشكل طبيعي في دراسة الزمر البسيطة.

كما لاحظنا قبل ذلك، في عام 2001، قائمة كاملة صحيحة من الزمر المنتهية كانت متوفرة فقط من أجل الزمر التي رتبتها تصل إلى 2000 تقريباً، وعدد الزمر في القائمة غامر.

نلاحظ بأن حلم تصنيف الزمر البسيطة المنتهية يرجع على الأقل إلى Holder 1892. لكن الإستراتيجية الواضحة لتحقيق هذه لم تبدأ بالظهور حتى عام 1950s، عندما عمل بروييـر و مقترحون آخرون على أن المفتاح يكمن في دراسة ممركـزات العناصـر مـن الرتبـة 2 (الممركزات الالتفافية). مثلاً، بروبير و فولبير (1995) بينا بأنه، من أجل أي زمرة منتهية H، تكون محددات الزمر البسيطة المنتهية مع ممركز التفافي متماثل مع H هـو مـسألة منتهية. فيما بعد عمل مبيناً بأن المسألة سلسة للغاية، ولذلك أصبحت الإستراتيجية: (a) إن قائمة الزمر H، التي يمكن أن تعتبر كممركزات التفافية لبعض الزمر البسيطة المنتهيـة، و (b) لكل زمرة H في (a) قائمة الزمر البسيطة المنتهية للزمرة H التي تعتبـر كممركـز التفافي. بالطبع، هذا يقترب بتطبيقه فقط على الزمر البسيطة المنتهية الحاوية على عنصر من الرتبة 2، لكن هناك تخمين قديم يقول بأن، كل زمرة بسيطة منتهية رتبتهـا عـدد زوجـي وبالتالي تحوي على عنصر من الرتبة 2 وذلك حسب مبرهنة كوشي (13.4) ماعدا الزمـر الدائرية التي رتبها عدداً أولياً. مع برهان هذا التخمين من قبل فيت وثومبـسون (1963)، إن الجهد الذي بذل لإكمال تصنيف الزمر البسيطة المنتهية بدأ بجدية. لقد أعلن التـصنبف التـام عام 1982، ولكن مازال غير موثوق به، لأن البرهان عليه اعتمد على آلاف من الـصفحات في أجزاء من الصحف التي نادراً ما تقرأ، وفي الحقيقة، وأثناء صياغة البرهـان، كالعـادة ، اكتشفت ثغرة. فتوقفوا عند هذا الحـد، ومـع منـشورات Aschbacher و Smith 2004 أصبح بشكل عام مقبولاً لدينا بأن برهان تصنيف الزمر أمر معقد حقاً.

من أجل البيان الشعبي لتاريخ التصنيف، انظر كتاب رونان 2006، و لمعرفة أكثر عـن البيان التقني، انظر الجزء المعروض Solomon 2001.

تمارين

1-3 لتكن $D_4 = \left\langle a,b \,\middle|\, a^n, b^2, abab \right\rangle$ n^{th} زمرة ديهيدرال. إذا كان n فردي، بـرهن أن $D_{2n} \approx \left\langle a^n \right\rangle \times \left\langle a^2, b \right\rangle$، وبالتالي فإن $D_{2n} \approx C_2 \times D_n$.

2-3 لتكن G الزمرة الرباعية (1.17). برهن أنه لا يمكن كتابة G على شكل جداء شـبه مباشر بأي طريقة غير تافهة.

3-3 لتكن G زمرة من الرتبة mn بحيث لا يكون لـ m و n أي عامـل مـشترك. إذا كانت G تحوي على زمرة جزئية واحدة فقط M من الرتبة m و علـى زمـرة جزئيـة واحدة فقط N من الرتبة n، برهن بأن G جداء مباشر للزمرتين M و N.

3-4 برهن أن $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_2) \approx S_3$.

3-5 لتكن G الزمرة الرباعية (1.17) . برهن أن $\mathrm{Aut}(G) \approx S_4$.

3-6 لتكن G مجموعة جميع المصفوفات في $\mathrm{GL}_3(\ )$ من الشكل $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, ad \neq 0$. أثبت أن G زمرة جزئية من $\mathrm{GL}_3(\ )$ ، وبرهن أنها تشكل جداء شبه مباشر لـ ^{2} (الزمرة الجمعية) على $^\times \times ^\times$. وهل هي جداء مباشر لهاتين الزمرتين؟

3-7 أوجد التماثلات الذاتية للزمرتين C_∞ و S_3.

الفصل الرابع

تأثير زمر على مجموعات

Groups Acting on Sets

تعريف و أمثلة

تعريف 1.4 لتكن X مجموعة و لتكن G زمرة. إن التأثير اليساري (left action) للزمرة G على المجموعة X هو تطبيق $G\times X \to X :gx \mapsto (g,x)$ بحيث يكون

(a) $1x = x$، لكل $x\in X$:

(b) $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$، لكل $g_1,g_2\in G, x\in X$.

إن المجموعة مع التأثير (اليساري) للزمرة G تدعى G - مجموعة من (اليسار).

تقتضي الشروط أنه، لكل $g\in G$، فإن للمناقلة اليسارية وفق g،

$$g_L : X \to X,\ x \mapsto gx,$$

معكوس $(g^{-1})_L$، ولذلك فإن g_L تقابل، أي أن، $g_L \in \mathrm{Sym}(X)$. مــن المــسلمة (b) نجد أن

$$g \mapsto g_L : G \to \mathrm{Sym}(X) \tag{14}$$

تشاكل. لــذلك، مــن التــأثير اليــساري لـــــ G علـــى X، نحــصل علـــى التـــشاكل $G \to \mathrm{Sym}(X)$، وبالعكس، كل تشاكل كهذا يعرف تأثيراً لـــ G على X. يقــال بأنـــه أمين (faithful) (أو دقيق (effective)) إذا كان التشاكل (14) متبايناً، أي أنه، إذا كان

$$gx = x \text{ لكل } x\in X \Rightarrow g = 1$$

مثال 2.4 (a) كل زمرة جزئية من زمرة تناظرية S_n تؤثر بشكل أمين على $\{1,2,\ldots,n\}$.

(b) كل زمرة جزئية H من الزمرة G تؤثر بشكل أمين على G بالتحويل اليساري

$$H\times G \to G,\ (h,x) \mapsto hx$$

(c) لتكن H زمرة جزئية من G. إن الزمرة G تؤثر على مجموعة المرافقات اليسارية لـــ H،

$$G\times G/H \to G/H,\ (g,C) \mapsto gC$$

والتأثير يكون أميناً، إذا كان، مثلاً، $H \neq G$ و G بسيطة.

(d) كل زمرة G تؤثر على نفسها بالترافق،

$$G \times G \to G,\ (g, x) \mapsto g_x \overset{\text{def}}{=} gxg^{-1}$$

لأي زمرة جزئية ناظمية N، G تؤثر على N و G/N بالترافق.

(e) من أجل أي زمرة G، $Aut(G)$ تؤثر على G.

(f) الزمرة الحركية غير القابلة للتأثير (group of rigid motion) في $\mathbb{R}^n$ هي الزمــرة G من التقابلات $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ التي تحافظ على الأطوال. عندئذٍ G تؤثر علـــى $\mathbb{R}^n$ مـــن اليسار.

يعرف التأثير اليميني (right action) $X \times G \to G$ بشكل مشابه. لتحويـــل التـــأثير اليميني إلى تأثير يساري، نضع $g * x = xg^{-1}$. مثلاً، يوجد تأثير طبيعي يمينـــي لــــــ G على مجموعة المرافقات اليمينية للزمر الجزئية H في G، بالتحديـــد، $(C, g) \mapsto Cg$، الذي من الممكن أن يتحول إلى تأثير يساري $(g, C) \mapsto gC$.

التطبيق من G- مجموعة (أو، G- تطبيق أو G- تطبيـــق مكـــافئ) هـــو التطبيـــق $\varphi : X \to Y$ بحيث يكون

$$\varphi(gx) = g\varphi(x),\ \forall g \in G, x \in X\ .$$

التماثل لــ G- مجموعة هو G- تطبيق تقابل، عندئذٍ يكون نظيره هو أيضاً G- تطبيق.

المدارات (Orbits)

لتكن G زمرة تؤثر على المجموعة X. يقال عن المجموعة الجزئية $S \subset X$ أنها ثابتـــة (stable) بالنسبة إلى التأثير G إذا كان

$$g \in G,\ x \in S \Rightarrow gx \in S\ .$$

ينتج تأثير G على S من تأثير G على X.

نكتب $x \sim_G y$ إذا كـــان $y = gx$، لـــبعض $g \in G$. إن العلاقـــة انعكاســـية لأن $x = 1x$، وتناظرية لأن

$$y = gx \Rightarrow x = g^{-1}y$$

(بالضرب من اليسار بـــ g^{-1} وباستخدام المسلمات)، وهي متعدية لأن

$$y = gx,\ z = g'y \Rightarrow z = g'(gx) = (g'g)x\ .$$

لذلك فهي تشكل علاقة تكافؤ. ندعو صفوف التكافؤ G- مدار. لهذا فإن G- مدار يشكل تجزئة للمجموعة X. نكتب $G \backslash X$ لمجموعة المدارات.

لدينا من التعريف، إن G - مدار يحوي x_0 إذا كان

$$Gx_0 = \{gx_0 \mid g \in G\}$$

وهي أصغر مجموعة جزئية G - ثابتة X تحوي x_0.

مثال 3.4 (a) بفرض أن G تؤثر على X، وليكن $a \in G$ عنصراً من الرتبة n. عندئذٍ مدارات $\langle a \rangle$ هي مجموعات من الشكل

$$\{x_0, ax_0, \dots, a^{n-1}x_0\}$$

(ليس من الضروري أن تكون هذه العناصر مختلفة، ولذلك يمكن أن تحوي المجموعة على عدد أقل من n عنصر).

(b) إن مدارات الزمرة الجزئية H من G التي تؤثر على G بالجداء من اليسار هي المرافقات اليمينية لـ H في G. نكتب $H \backslash G$ لمجموعة المرافقات اليمينية. بشكل مشابه، إن مدارات H التي تؤثر على G بالجداء من اليمين هي المرافقات اليسارية لـ H في G، ونكتب G/H لمجموعة المرافقات اليسارية. نلاحظ بأن قانون الزمرة على G لن ينتج عنه قانون الزمرة على G/H باستثناء الحالة التي تكون فيها H ناظمية.

(c) من أجل الزمرة G التي تؤثر على نفسها بالترافق، تدعى المدارات بصفوف الترافق: لكل $x \in G$، إن صف ترافق x هو المجموعة

$$\{gxg^{-1} \mid g \in G\}$$

والتي هي مرافقات x_0. إن صف ترافق x يحوي دائماً x_0، و يتألف فقط من x_0 إذا وفقط إذا كان x_0 في مركز G. في الجبر الخطي تكون صفوف الترافق في G متساوية مع $\mathrm{GL}_n(k)$ والتي تسمى بصفوف التشابه، وإن نظرية الأشكال النسبية القانونية تزود بمجموعة تمثيلات لصفوف الترافق: تكون المصفوفتان متشابهتين (مترافقتين) إذا وفقط إذا كان لهما نفس الشكل النسبي القانوني.

نلاحظ بأنه تكون المجموعة الجزئية من X ثابتة إذا وفقط إذا كانت اجتماعاً لمدارات. مثلاً، تكون الزمرة الجزئية H ناظمية في G إذا وفقط إذا كانت اجتماعاً لصفوف الترافق.

يقال بأن تأثير G على X متعدياً (transitive)، ويقال بأن G تؤثر على X بشكل متعد (transitivity)، إذا وجد مدار واحد فقط، أي أنه، لأجل أي عنصرين x و y من X، يوجد $g \in G$ بحيث يكون $gx = y$. عندئذٍ تدعى المجموعة X G - متجانسة (homogeneous). مثلاً، إن S_n تؤثر على $\{1, 2, \dots, n\}$ بشكل متعدٍ. لأجل أي زمرة

جزئية H من الزمرة G، فإن G تؤثر على G/H بشكل متعدٍ، لكن تـــأثير G علـــى نفسها يكون غير متعدٍ إذا كان $G \neq 1$ لأن $\{1\}$ هو صف ترافق دائماً.

يكون تأثير الزمرة G على X متعدياً بشكل مضاعف (doubly transitive) إذا كان لأي زوجين $(x_1,x_2),(y_1,y_2)$ من عناصر X بحيث $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$، يوجـــد عنصر (مفرد) $g \in G$ بحيث يكون $gx_1 = y_1$ و $gx_2 = y_2$. نعرف k- مضاعفاً متعدياً (fold transitivity) لكل $k \geq 3$ بشكل مشابه.

المثبتات (Stabilizers)

لتكن G زمرة تؤثر على X. إن المثبت (Stabilizer) (أو موحد الخـــواص (isotropy group)) العنصر $x \in X$ إذا كان

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

وهو زمرة جزئية، لكن ليس من الضروري أن يكون زمرة جزئية ناظمية. في الحقيقة:

تمهيدية 4.4 لأي $g \in G$ و $x \in X$،

$$\mathrm{Stab}(gx) = g.\mathrm{Stab}(x).g^{-1}$$

البرهان.

إذا كان $g'x = x$، تحديداً، عندئذٍ

$$(gg'g^{-1})x = gg'x = gx = y,$$

وبالتالي $g.\mathrm{Stab}(x).g^{-1} \subset \mathrm{Stab}(gx)$. العكس، إذا كان $g'(gx) = gx$، عندئذٍ

$$(g^{-1}g'g)x = g^{-1}g'(gx) = g^{-1}y = x,$$

ومنه $g^{-1}g'g \in \mathrm{Stab}(x)$، أي أن $g' \in g.\mathrm{Stab}(x).g^{-1}$.

من الواضح

$$\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Ker}(G \to \mathrm{Sym}(x)),$$

والذي هو زمـــرة جزئيـــة ناظميـــة فـــي G. يكـــون التـــأثير أمينـــاً إذا وفقـــط إذا كـــان $\bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}(x) = \{1\}$.

مثال 5.4 (a) لتكن G زمرة تؤثر على نفسها بالترافق. عندئذٍ

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

تسمى هذه الزمرة بممركز (centralizer) $C_G(x)$ العنصر x في G. وهي تتألف من جميع عناصر G التي تتبادل معه، أي أنه، مركز، x. إن التقاطع

$$\bigcap_{x\in G} C_G(x)=\{g\in G \mid gx=xg\ ,\ \forall x\in G\}$$

هو مركز G.

(b) لتكن G زمرة تؤثر على G/H بالجداء من اليسار. عندئذٍ $\mathrm{Stab}(H)=H$، ومثبت gH هو gHg^{-1}.

(c) لتكن G زمرة من الدورانات غير المتأثرة في $\mathbb{R}^n$ (4.2f). إن ممركز مبدأ الإحداثيات هو الزمرة المتعامدة O_n للشكل المعرف الموجب القياسي على $\mathbb{R}^n$ (Artin1991، الفصل 4، 5.16). ليكن $(\mathbb{R}^n,+)$ T زمرة جزئية من G لتحويلات $\mathbb{R}^n$، أي أنه، تطبيق من الشكل $v\mapsto v+v_0$ لبعض $v_0\in\mathbb{R}^n$. عندئذٍ فإن T زمرة جزئية ناظمية في G و أن G $T\times_q O$ (cf. Artin 1991، الفصل. 5,§2).

لأجل المجموعة الجزئية S من X، نعرف مثبت (Stabilizer) S بالشكل

$$\mathrm{Stab}(S)=\{g\in G \mid gS=S\}$$

عندئذٍ $\mathrm{Stab}(S)$ زمرة جزئية في G، وبنفس الترتيب كما في برهان (4.4) تبين بأن

$$\mathrm{Stab}(gS)=g.\mathrm{Stab}(S).g^{-1}$$

مثال 4.6 لتكن G زمرة تؤثر على G بالترافق، ولتكن H زمرة جزئية في G. يسمى مثبت H بالمنظم (normalizer) $N_G(H)$ لـ H في G:

$$N_G(H)=\{g\in G \mid gHg^{-1}=H\}$$

من الواضح بأن $N_G(H)$ هي أكبر زمرة جزئية تحوي H كما أنها زمرة جزئية ناظمية.

من المحتمل أن يكون $gS\subset S$ لكن $g\in\mathrm{Stab}(S)$ (انظر 1.32).

التأثيرات المتعدية (Transitive actions)

قضية 7.4 إذا كانت G تؤثر على X بشكل متعدٍ، عندئذٍ لأي $x_0\in X$، يكون التطبيق

$$g\,\mathrm{Stab}(x_0)\mapsto gx_0 : G/\mathrm{Stab}(x_0)\to X$$

تماثل على G- مجموعة.

البرهان. إن التطبيق معرف جيداً لأنه، إذا كان $h\in\mathrm{Stab}(x_0)$، عندئذٍ $ghx_0=gx_0$. وهو متباين لأن

$$gx_0 = g'x_0 \Rightarrow g^{-1}g'x_0 = x_0 \Rightarrow$$

$(g, g'$ تقعان في نفس المرافقات اليسارية لــ $(\text{Stab}(x_0)$

وهو غامر لأن G تؤثر بشكل متعدٍ. أخيراً، يكون واضحاً لنا بأنه G - تكافؤ.

لهذا إن كل G - مجموعة متجانسة X تكون متماثلة مع G/H لبعض مــن الزمــر الجزئية H في G، لكن هكذا تحويل لــ X ليس قانونياً: يعتمد على اختيــار $x_0 \in X$.

لنقول ذلك بطريقة أخرى، يكون لــ G - المجموعة G/H نقطــة منفــصلة، وبالتحديــد، المرافقة H؛ لإعطاء G - مجموعة متجانسة X مع نقاطها المنفصلة، هي تمامــاً التــي تعطي زمرة جزئية في G.

نتيجة 8.4 لتكن G زمرة تؤثر على X، وليكن $O = Gx_0$ المدار الذي يحوي x_0.

عندئذٍ فإن عدد العناصر في O يساوي

$$|O| = (G : \text{Stab}(x_0))$$

مثلاً، إن عدد المرافقات gHg^{-1} للزمرة الجزئية H في G يساوي $(G : N_G(H))$.

البرهان. إن تأثير G على O يكون متعدياً، ولذلك فإن $g \mapsto gx_0$ يعرف تطبيقــاً تقــابلاً $G/\text{Stab}(x_0) \to Gx_0$.

هذه المعادلة مفيدة دائماً لحساب $|O|$.

قضية 9.4 لتكن G زمرة تؤثر على X بشكل متعدٍ، عندئذٍ، لأي $x_0 \in X$، تكون

$$\text{Ker}(G \to \text{Sym}(X))$$

زمرة جزئية ناظمية عظمى محتواة في $\text{Stab}(x_0)$.

البرهان. لتكن $x_0 \in X$. عندئذٍ

$$\text{Ker}(G \to \text{Sym}(X)) = \bigcap_{x \in X} \text{Stab}(x) = \bigcap_{g \in G} \text{Stab}(gx_0) \overset{4.4}{=} \bigcap g.\text{Stab}(x_0)g^{-1}$$

وبالتالي، فإن هذه القضية عبارة عن متابعة للتمهيدية الآتية.

تمهيدية 10.4 لأي زمرة جزئية H من الزمرة G، $\bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ هي زمرة جزئيــة ناظمية عظمى محتواة في H.

البرهان. نلاحظ بأن $N_0 \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$، وبما أنها تقاطع لزمر جزئية، فهــي زمــرة جزئية. وتكون ناظمية لأن

$$g_1 N_0 g_1^{-1} = \bigcap_{g \in G} (g_1 g) N_0 (g_1 g)^{-1} = N_0$$

- من أجل المساواة الثانية، استخدمنا، g التي تمسح كل عناصر G، و كذلك $g_1 g$. لهذا فإن N_0 زمرة جزئية ناظمية في G محتواة في $eHe^{-1} = H$. إذا كانت N زمرة أخرى كهذه، عندئذٍ

$$N = gNg^{-1} \subset gHg^{-1}$$

لكل $g \in G$، ومنه

$$N \subset \bigcap_{g \in G} gHg^{-1} = N_0$$

صفوف التكافؤ (The class equation)

إذا كانت X منتهية، فإنها عبارة عن اجتماع منفصل لعدد منته من المدارات:

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} O_i \qquad \text{(اجتماع منفصل)}$$

وبالتالي:

قضية 11.4 إن عدد العناصر في X يساوي

$$|X| = \sum_{i=1}^{m} |O_i| = \sum_{i=1}^{m} \left(G : \mathrm{Stab}(x_i)\right), \ x_i \in O_i$$

عندما تؤثر الزمرة G على نفسها بالترافق، تصبح هذه الصيغة كما يأتي:

قضية 12.4 (صفوف التكافؤ)

$$|G| = \sum \left(G : C_G(x)\right)$$

(حيث x تمسح مجموعة ممثلات صفوف الترافق).

$$|G| = |Z(G)| + \sum \left(G : C_G(y)\right)$$

(إن y تمسح مجموعة ممثلات صفوف الترافق الحاوية على أكثر من عنصر واحد).

مبرهنة 13.4 (كوشي) إذا كان العدد الأولي p يقسم $|G|$، عندئذٍ فإن G تحوي على عنصر من الرتبة p.

البرهان. نستخدم الاستقراء على $|G|$. إذا كانت مجموعة من العناصر y لا تنتمي إلى مركز G، p لا يقسم $\sum \left(G : C_G(y)\right)$، عندئذٍ $p \big| C_G(y)$ و يمكن أن نطبق الاستقراء لإيجاد عنصر من الرتبة p في $C_G(y)$. لذلك يمكن أن نفرض أن p يقسم كل حدود $\left(G : C_G(y)\right)$ في معادلة الصفوف (الشكل الثاني)، ولذلك فهو يقسم أيضاً

$Z(G)$. لكن $Z(G)$ تبديلي، و من مبرهنة البنى[13] لمثل هذه الزمر نجد بـــأن $Z(G)$ يحوي عنصر من الرتبة p.

نتيجة 14.4 تكون الزمرة المنتهية G p - زمرة إذا وفقط إذا كانت رتبة كل عنصر مـــن عناصرها قوى لعدد أولي.

البرهان. إذا كانت $|G|$ قوى لـــ p، عندئذٍ (25.1) تبين مبرهنة لاغرانج بأن رتبـــة كـــل عنصر يكون قوى للعدد p. والعكس يبرهن عليه من مبرهنة كوشي.

نتيجة (15.4) كل زمرة من الرتبة $2p$، p عدد أولي فردي، تكـــون دائريـــة أو زمـــرة ديهيدرال.

البرهان. من مبرهنة كوشي، نعلم بأن الزمرة G تحوي على عناصر s و r من الرتبة 2 و p على الترتيب. لتكن $H=\langle r\rangle$. عندئذٍ فإن دليل H يساوي 2، ولهذا فهي ناظمية. من الواضح أن $s\notin H$، ومنه $G=H\cup H_s$:

$$G=\{1,r,\ldots,r^{p-1},s,rs,\ldots,r^{p-1}s\}$$

وبمـــا أن H زمـــرة جزئيـــة ناظميـــة ، $srs^{-1}=r^{i}$، لـــبعض i. وذلـــك لأن $s^{2}=1, r=s^{2}rs^{-2}=s\left(srs^{-1}\right)s^{-1}=r^{i^{2}}$، ولذلك $i^{2}\equiv 1 \bmod p$. لأن $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حقل، تكون عناصره فقط الأعداد التي تربيعها يساوي 1 وهـــي ± 1، ولـــذلك $i\equiv 1 \bmod p$ أو $i\equiv -1 \bmod p$. في الحالة الأولى، الزمرة تبديلية (أي زمرة مولدة بمجموعة من العناصر المتبادلة من الواضح أنها تبديلية)، وفي الحالة الثانية $srs^{-1}=r^{-1}$ و نكون قد حصلنا علـــى زمرة ديهيدرال (9.2).

p - زمر

مبرهنة 4.16 لكل p - زمرة منتهية غير تافهة مركز غير تافه.

[13] يوجد هنا برهان مباشر هو أن المبرهنة محققة من أجل زمرة آبلية Z. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة Z. يكفي أن نبين بأن Z تحوي على عنصر و التي تقبل رتبته القسمة على p، لأنه عندئـــذٍ بعـــض قـــوى العناصر سيكون من الرتبة p تماماً. ليكن $g\neq 1$ عنصر من Z. إذا كان p لا يقبل القسمة على رتبة g، عندئذٍ سيقسم رتبة الزمرة $Z/\langle g\rangle$، في الحالة التي يوجد فيها (بالاستقراء) عنصر من G بحيث تقبل رتبته في $Z/\langle g\rangle$ القسمة على p. لكن رتبة مثل هذا العنصر يجب أن تقبل القسمة على p.

البرهان. من الفرض، بما أن $(G:1)$ قوى لعدد أولي p، وبالتـالي فـإن $\left(G:C_G(y)\right)$ قوى لعدد أولي p $(p\neq 0)$ لكل y في معادلة الصفوف (الشكل الثاني). بما أن p يقسم كل حد من معادلة الصفوف باستثناء (ربما) $\left(Z(G):1\right)$، وبالتالي يجب أن يقسم $\left(Z(G):1\right)$ أيضاً.

نتيجة 17.4 الزمرة من الرتبة p^n تحوي على زمرة جزئية ناظمية من الرتبة p^m لكل $m\leq n$.

البرهان. نستخدم الاستقراء الرياضي على n. إن مركز الزمرة G يحوي عنصر من الرتبة p، ولذلك $N=\langle g\rangle$ زمرة جزئية ناظمية في G من الرتبة p. الآن ومن فرضية الاستقراء يمكننا أن نفرض النتيجة بالنسبة إلى G/N، ومن ثم فإن مبرهنة التقابل (46.1) تعطينا النتيجة بالنسبة إلى G.

قضية 18.4 كل زمرة رتبتها p^2 هي زمرة تبديلية، وبالتالي تكون متماثلة مع $C_p\times C_p$ أو C_{p^2}.

البرهان. نعلم بأن مركز الزمرة Z ليس تافهاً، ولذلك فإن G/Z من الرتبة 1 أو من الرتبة p. في كل من الحالتين تكون دائرية، وبالتالي فإن G تبديلية.

تمهيدية 19.4 نفرض بأن G تحتوي على الزمرة الجزئية H في مركزها (وبالتالي فهي ناظمية) بحيث يكون G/H دائرية. عندئذٍ G تبديلية.

البرهان. ليكن a عنصراً من الزمرة G والذي صورته في G/H يولدها. عندئذٍ كل عنصر من G يمكن أن يكتب بالشكل $g=a^ih$ مع $h\in H, i\in$. الآن

$$a^ih.a^{i'}h'=a^ia^{i'}hh' \quad (H\subset Z(G) \text{ لأن})$$

$$=a^{i'}a^ih'h$$

$$=a^{i'}h'.a^ih$$

ملاحظة 20.4 يبين البرهان السابق بأنه إذا كان $H\subset Z(G)$ و G تحتوي على مجموعة من ممثلات G/H بحيث تكون عناصرها متبادلة، عندئذٍ فإن G تبديلية.

من أجل العدد الأولي الفردي p، ليس من الصعب الآن أن نبين بأن أي زمرة غير تبديلية من الرتبة p^3 متماثلة تماماً مع واحدة من الزمر المبنية في (3.13, 3.14) (التمرين 3-4). لهذا، تحت سقف التماثل، يوجد تماماً زمرتين غير تبديليتين من الرتبة p^3.

مثال 21.4 لتكن G زمرة غير تبديلية من الرتبة 8. عندئذٍ يجب أن تحوي على عنصر a من الرتبة 4 (انظر التمرين 5-1). إذا كانت G تحوي على عنصر من الرتبة 2 بحيث لا ينتمي إلى $\langle a \rangle$، عندئذٍ $\langle a \rangle \times_q \langle b \rangle$ G حيث q هو التماثل الوحيد $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to (\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{\times}$، ولذلك $G \approx D_4$. أما إذا لم يكن كذلك، أي عنصر b من G لا يقع في $\langle a \rangle$ يجب أن يكون من الرتبة 4، و $a^2 = b^2$. الآن bab^{-1} هو عنصر من الرتبة 4 في $\langle a \rangle$. ولا يساوي a، لأنه من جهة أخرى G ستكون تبديلية، ولهذا فإن G هي الزمرة الرباعية (17.1, 2.7b).

التأثيرات على المرافقات اليسارية (Action on the left cosets)

تأثير الزمرة على مجموعة المرافقات اليسارية G/H للزمرة H في G وسيلة مفيدة جداً في دراسة الزمر. سنوضح هذا مع بعض الأمثلة.

لتكن $X = G/H$. نتذكر بأن، لأي $g \in G$،

$$\operatorname{Stab}(gH) = g\operatorname{Stab}(H)g^{-1} = gHg^{-1}$$

و نواة التطبيق

$$G \to \operatorname{Sym}(X)$$

هي زمرة جزئية عظمى $\bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$ في G محتواة في H.

ملاحظة 22.4 (a) لتكن H زمرة جزئية في G لا تحوي على زمرة جزئية ناظمية في G غير 1. عندئذٍ $G \to \operatorname{Sym}(G/H)$ متباين، ولقد تحققنا بأن G كزمرة جزئية من زمرة تناظرية ومن رتبة أقل بكثير من $(G:1)!$. مثلاً، إذا كانت G بسيطة، عندئذٍ تبين مبرهنات سيلو (انظر 5 §) بأن G تحوي على زمرة فعلية $H \neq 1$ (باستثناء الحالة التي تكون فيها G دائرية)، لكنها (من التعريف) لا تحوي على زمرة جزئية ناظمية كهذه.

(b) إذا كانت $(G:1)$ لا تقسم $(G:1)!$، عندئذٍ

$$G \to \operatorname{Sym}(G/H)$$

لن يكون متبايناً (مبرهنة لاغرانج، 25.1)، ويمكن أن نستنتج بأن H تحوي على زمرة جزئية ناظمية $\neq 1$ في G. مثلاً، إذا كانت G من الرتبة 99، عندئذٍ تحوي على زمرة جزئية ناظمية N من الرتبة 11 (مبرهنة كوشي 13.4)، والزمرة الجزئية يجب أن تكون ناظمية. في الحقيقة، $G = N \times Q$.

مثال 23.4 إن النتيجة 4.15 تبين بأن كل زمرة G من الرتبة 6 إما دائرية أو زمرة ديهيدرال. نقدم هنا ترتيب مختلف وبشكل مبسط. بالعودة إلى مبرهنة كوشي (13.4)، يجب أن تحوي G على عنصر r من الرتبة 3 وعلى عنصر s من الرتبة 2. علاوةً على ذلك $N \overset{\text{def}}{=} \langle r \rangle$ يجب أن تكون ناظمية لان 6 لا تقسم !2 (أو ببساطة لأن دليلها يساوي 2). لتكن $H = \langle s \rangle$. إما (a) تكون H زمرة جزئية ناظمية في G، أو (b) H ليست زمرة جزئية ناظمية في G. في الحالة الأولى، $rsr^{-1} = s$، أي أن $rs = sr$، ولذلك $\langle r \rangle \times \langle s \rangle \approx C_2 \times C_3$ G. في الحالة الثانية، إن $G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ متباين، وبالتالي يكون غامراً، ومنه $G \approx S_3 \approx D_3$.

زمر التبديلات (Permution groups)

نأخذ $\mathrm{Sym}(X)$ حيث X تحوي على n عنصر. بما أن (تحت سقف التماثل) الزمرة التناظرية $\mathrm{Sym}(X)$ تعتمد فقط على عدد العناصر في X، يمكن أن نأخذ $X = \{1, 2, ..., n\}$، وهكذا بالنسبة للزمرة S_n. إن الرمز $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{smallmatrix}\right)$ يدل على التبديلة التي ترسل $1 \;\mathbf{a}\; 2, 2 \;\mathbf{a}\; 5, 3 \;\mathbf{a}\; 7$، الخ ...

نعتبر التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{L} & n \\ a(1) & a(2) & a(3) & \mathbf{L} & a(n) \end{pmatrix}.$$

يسمى الزوج (i, j) حيث $i < j$ و $a(i) > a(j)$ بمعكوس (inversions) a، ويقال بأن a فردي أو زوجي وذلك حسب عدد المعكوسات إن كانت فردية (odd) أو زوجية (even).. إن إشارة a، $\mathrm{sign}(a)$، إما تساوي 1+ أو 1- وذلك حسب a إن كانت زوجية أو فردية.

ملاحظة 24.4 لحساب إشارة a، نصل (بخط) كل عنصر i في السطر الأعلى مع عنصر i في السطر السفلي، و نحسب عدد المرات التي تقاطعت فيها الخطوط: يكون a زوجياً أو فردياً حسب هذا العدد إن كان زوجياً أو فردياً. مثلاً،

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

إنه زوجي (6 تقاطعات). هذا ممكن، بسبب وجود تقاطع واحد لكل معكوس.

من اجل التبديلة a، نعتبر الجداء

$$V = \prod_{1\le i<j\le n}(j-i) = (2-1)(3-1)\dots(n-1)$$
$$(3-2)\dots(n-2)$$
$$\dots$$
$$(n-(n-1))$$

$$aV = \prod_{1\le i<j\le n}(a(j)-a(i)) = (a(2)-a(1))(a(3)-a(1))\dots(a(n)-a(1))$$
$$(a(3)-a(2))\dots(a(n)-a(2))$$
$$\dots$$
$$(a(n)-a(n-1)).$$

إن الحدود في كل من الجداءين متساوية ما عدا الحدود التي كل معكوس فيها يعطي إشارة سالبة[14] . لذلك،

$$aV = sign(a)V$$

بمقارنة مشابهة نجد بأنه، من أجل أي تبديلة b ،

$$a(bV) = sign(a)(bV). \tag{16}$$

بما أن $bV = sign(b)V$ و $a(bV) = (ab)V = sign(ab)V$ ، هذا يبين لنا

$$sign(ab) = sign(a)sign(b)$$

لذلك، "$sign$" هو التشاكل $S_n \to \{\pm 1\}$. عندما $n \ge 2$ ، يكون غامراً، وبالتالي تكون نواته عبارة عن زمرة جزئية ناظمية في S_n من الرتبة $\frac{n!}{2}$، وتسمى بالزمرة المتناوبة (alternating group) A_n.

الدورة (cycle) هي تبديلة من الشكل الآتي

$$i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto \dots i_r \mapsto i_1$$

أما الأعداد المتبقية فهي ثابتة.

[14] كل منها هو جداء فوق مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين من $\{1,\dots,n\}$، يقابل العامل للمجموعة الجزئية $\{i,j\}$ وهو $\pm(j-i)$.

يجب أن يكون i_j مختلفاً. نرمز للدورة بالرمز $(i_1 i_2 ... i_r)$، و ندعو r بطــول الــدورة- نلاحظ أن r أيضاً يساوي رتبة الدورة عنما تعتبر كعنصر من S_n. تسمى الــدورة التـــي طولها يساوي 2 مناقلة. إن الدورة (i) ذات الطول 1 هي التطبيق المحايد. دعامة الــدورة (support of the cycle) $(i_1 ... i_r)$ هي مجموعة العناصر $\{i_1, ..., i_r\}$، يقال بأن الدورات منفصلة إذا كانت دعاماتها منفصلة (disjoint). نلاحظ بأنه تكون الدورات المنفصلة تبديلية.

إذا كانت

$$a = (i_1 ... i_r)(j_1 ... j_s)...(l_1 ... l_u) \quad \text{(دورات منفصلة)}$$

عندئذٍ

$$a^m = (i_1 ... i_r)^m (j_1 ... j_s)^m ...(l_1 ... l_u)^m \quad \text{(دورات منفصلة)}$$

وبالتالي فإن a من الرتبة $\operatorname{lcm}(r, s, ..., u)$.

قضية 25.4 كل تبديلة يمكن أن تكتب (وبطريقة واحــدة بــشكل أساســي) كجــداء دورات منفصلة.

البرهان. لتكن $a \in S_n$، وليكن $O \subset \{1, 2, ..., n\}$ مدار لــ a. إذا كــان $|O| = r$، عندئذٍ لأي $i \in O$،

$$O = \{i, a(i), ..., a^{r-1}(i)\}$$

لذلك فإن a و الدورة $(i\, a(i) ... a^{r-1}(i))$ لهما التأثير نفسه على أي عنصر مــن O.

ليكن

$$\{1, 2, ..., n\} = \bigcup_{j=1}^{m} O_j$$

تحليل (decomposition) للمجموعة $\{1, ..., n\}$ لاجتماع مدارات منفصلة $\langle a \rangle$، ولــتكن g_j دورة مرتبطة (كما سبق) بــ O_j. عندئذٍ

$$a = g_1 ... g_m$$

هو تحليل a إلى جداء دورات منفصلة. للوحدانية، نلاحظ أن تحليل $a = g_1 ... g_m$ إلى جداء دورات منفصلة يجب أن يقابل تحليل $\{1, ..., n\}$ إلى مدارات (دورات مجهولة من الطول 1 و مدارات مؤلفة من عنصر واحد). يمكن أن نتجاهل الدورات التي طولها يساوي 1، نغيــر رتبة الدورات، و نغير كيفية كتابة كل دورة (باختيار عناصر ابتدائية مختلفة)، لكن هذا كــل شيء لأن المدارات مرتبطة بــ a.

مثلاً،

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 1 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} = (15)(27634)(8)$$

من الرتبة $\operatorname{lcm}(2,5)=10$.

نتيجة 26.4 كل تبديلة يمكن أن تكتب على شكل جداء مناقلات، وإن عدد المناقلات في هـذا الجداء يكون إما زوجياً أو فردياً وذلك حسب a إن كانت زوجية أو فردية.

البرهان.

نأخذ الدورة

$$(i_1 ... i_r) = (i_1 i_2)...(i_{r-2} i_{r-1})(i_{r-1} i_r),$$

ومنه فإن الحالة الأولى تأتي من التمهيدية. لأن sign هو تشاكل و إشارة المناقلة 1-،

$$\operatorname{sign}(a) = (-1)^{\#\text{مناقلات}}.$$

نلاحظ بأن صيغة البرهان تبين بأن إشارة الدورة ذو الطول r هي $(-1)^{r-1}$، إن، r - دورة تكون زوجية أو فردية حسب r إن كان فردياً أو زوجياً.

من المحتمل أن نعرف تبديلة ما لتكون زوجية أو فردية كما في الجـداء إن كـان لعـدد زوجي أو فردي من المناقلات، ولكن عندها يجب أن تراعي إحدى المناقلات الترتيـب كمـا سبق لتبين بأن هذا المفهوم معرف جيداً.

تنص النتيجة على أن S_n مولدة بالمناقلات. أما بالنسبة لـ A_n فتوجد النتيجة الآتية.

نتيجة 27.4 الزمرة المتناوبة A_n مولدة بدورات ذات الطول 3.

البرهـان. أي $a \in A_n$ هو جداء (من المحتمل أن يكون خالياً) لعدد زوجي من المنـاقلات، $a = t_1 t_1' ... t_m t_m'$، ولكن جداء أي مناقلتين يمكن أن يكتب دائماً كجداء لـ 3- دورة:

$$(ij)(kl) = \begin{cases} (ij)(jl), & j = k \\ (ij)(jk)(jk)(kl) = (ijk)(jkl), & i,j,k,l \text{ مختلفة} \\ 1, & (ij) = (kl). \end{cases}$$

نتذكر بأنه يقال عن العنصرين a و b أنهما مترافقان b a إذا كان يوجـد عنـصر $g \in G$ بحيث إن $b = gag^{-1}$، و أن الترافق هو علاقة تكافؤ. بالنسبة للزمـرة G، مـن المفيد أن نحدد صفوف الترافق في G.

مثال 28.4 في S_n، الدورات المترافقة مع الدورة تعطى بالعلاقة:

$$g(i_1 ... i_k) g^{-1} = (g(i_1) ... g(i_k)).$$

بالتالي $g\,(i_1...i_r)...(l_1...l_u)\,g^{-1}=\big(g\,(i_1)...g\,(i_r)\big)...\big(g\,(l_1)...g\,(l_u)\big)$ (حتى لــو كانت الدورات ليست منفصلة، لأن الترافق عبارة عن تشاكل). بكلمات أخرى، لنحصل علــى $g\,a\,g^{-1}$، نستبدل كل عنصر في كل دورة في a بصورته بالنسبة لـــ g .

سوف نحدد الآن صفوف الترافق في S_n . بتجزئة (partition) n، نعني بمتتالية مــن الأعداد الصحيحة $n_1,...,n_k$ بحيث إن

$$1\le n_1\le n_2\le...\le n_k\le n \text{ و}$$

$$n_1+n_2+...+n_k=n$$

مثلاً، يوجد تماماً 5 تجزئات للعدد 4 وهي بالتحديد،

$$4=1+1+1+1,\ \ 4=1+1+2,\ \ 4=1+3,\ \ 4=2+2,\ \ 4=4$$

و 1,121,505 تجزئة للعدد 61. نلاحظ أن تجزئة

$$\{1,2,...,n\}=O_1\cup...\cup O_k \text{ (اجتماع منفصل)}$$

للمجموعة $\{1,2,...,n\}$ تحدد تجزئة للعدد n ،

$$n=n_1+n_2+...+n_k\,,\ \ n_i=|O_i|$$

بما أن مدارات عنصر a من S_n تشكل تجزئة للمجموعة $\{1,2,...,n\}$، يمكن أن نــصل إلى كل عنصر مثل a بتجزئة n . مثلاً، تجزئة العدد 8 مرتبطة بـــــ $(8)(27634)(15)$ وهي 1,2,5 و التجزئة المرتبطة بـــ n ترتبط بــ

$$a=\left(i_1...i_{n_1}\right)...\left(l_1...l_{n_k}\right),\ \ 1<n_i\le n_{i+1}, \text{ (دورات منفصلة)}$$

وهي $1,1,...,1,n_1,...,n_k$ ($n-\sum n_i$ مرة)

قضية 29.4 يكون العنصران a و b مترافقان إذا وفقط إذا كانا يعرفان التجزئة نفسها لـــ n .

البرهان. $\Rightarrow$: رأينا في (28.4) أن مرافق عنصر يحافظ على شكلها المحلــل إلـــى دورات منفصلة.

$\Leftarrow$: بما أن a و b يعرفان التجزئة نفسها لـــ n، لذلك فإن تحليلها إلـــى جـــداء دورات منفصلة له الشكل نفسه:

$$a=(i_1...i_r)(j_1...j_s)...(l_1...l_u),$$

$$b=\left(i_1'...i_r'\right)\left(j_1'...j_s'\right)...\left(l_1'...l_u'\right),$$

إذا عرفنا g بالشكل

$$\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r & j_1 \dots j_s \dots l_1 \dots l_u \\ i_1' \dots i_r' & j_1' \dots j_s' \dots l_1' \dots l_u' \end{pmatrix},$$

عندئذٍ

$$g\,a\,g^{-1} = b$$

مثال 30.4 $(i\ j\ k) = \begin{pmatrix} 1234\dots \\ i\ j\ k\ 4\dots \end{pmatrix} (123) \begin{pmatrix} 1234\dots \\ i\ j\ k\ 4\dots \end{pmatrix}^{-1}$ **.**

ملاحظة 31.4 لكل $1 < k \le n$، يوجد $\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k}$ k - دورة مختلفة في S_n. نحتاج إلى $\frac{1}{k}$ لذلك لا يمكن أن نحسب

$$(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_k i_1 \dots i_{k-1}) = \dots$$

k مرة. بشكل مشابه، من المحتمل أن نحسب عدد العناصر في أي صف ترافق في S_n، لكن نحتاج إلى القليل من الحرص عندما تحوي التجزئة على عدة حدود متساوية. مثلاً، إن عدد التبديلات في S_4 من الشكل $(ab)(cd)$ يساوي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4\times 3}{2}\times\frac{2\times 1}{2}\right) = 3$$

نحن بحاجة إلى العدد $\frac{1}{2}$ لذلك لا يمكن أن نحسب $(ab)(cd)$ مرتين. بالنسبة لـ S_4 لدينا الجدول الآتي:

التجزئة	العنصر	لا يقع في صف التكافؤ	النوع
$1+1+1+1$	1	1	زوجي
$1+1+2$	(ab)	6	فردي
$1+3$	(abc)	8	زوجي
$2+2$	$(ab)(cd)$	3	زوجي
4	$(abcd)$	6	فردي

نلاحظ بأن A_4 تحوي على 3 عناصر فقط من الرتبة 2، وهي بالتحديد العناصر التي من الشكل 2+2، و أنها تشكل مع 1 زمرة جزئية V. هذه الزمرة هي اجتماع لصفوف الترافق، ولذلك فهي زمرة جزئية من S_4.

مبرهنة 32.4 (Galois) إن الزمرة A_n بسيطة لكل $n \ge 5$.

ملاحظة 33.4 من أجل $n=2$، تكون A_n تافهة، ومن أجل $n=3$، تكون A_n زمرة دائرية من الرتبة 3، وبالتالي فهي بسيطة، من أجل $n=4$ فهي ليست تبديلية وليست بسيطة – تحوي على زمرة ناظمية، و مميزة، الزمرة الجزئية V (انظر 31.4).

تمهيدية 34.4 لتكن N زمرة جزئية ناظمية في A_n $(n \geq 5)$، إذا كانت N تحوي على دور طوله 3، عندئذٍ فهي تحوي على كل الدورات التي طولها 3، ولذلك فهي تـــساوي A_n (من 27.4).

البرهان. لتكن g دورة طولها 3 في A_n، ولتكن a دورة أخرى طولها 3 في A_n. نعلم من (29.4) بأن $a = g g g^{-1}$ لبعض العناصر $g \in S_n$. إذا كان $g \in A_n$، هذا يبين بـــأن a تنتمي أيضاً إلى N. إذا لم يكن كذلك، لأن $n \geq 5$، توجد مناقلة $t \in S_n$ منفصلة عــن a. عندئذٍ $tg \in A_n$ و

$$a = t\,a\,t^{-1} = t\,g\,g\,g^{-1}t^{-1},$$

و منه فإن $a \in A_n$ ثانيةً.

التمهيدية الآتية تكمل برهان المبرهنة.

تمهيدية 35.4 كل زمرة جزئية ناظمية N في A_n، $n \geq 5,\ N \neq 1$، تحوي دورة طولها 3.

البرهان. لتكن $a \in N, a \neq 1$. إذا لم يكن a عبارة عن 3- دورة، سنبني عنصراً آخــر $a' \in N, a' \neq 1$، بحيث نثبت عناصر $\{1,2,...,n\}$ أكثر مما تثبته a. إذا لــم يكــن a' عبارة عن 3- دورة، عندئذٍ يمكن أن نطبق البناء نفسه. بعد عدد منتهي من الخطوات، نصل إلى 3- دورة.

بفرض أن a ليست عبارة عن 3- دورة. عندئذٍ نعبر عنها كجداء لدورات منفصلة، إما تحوي على دورة طولها ≥ 3 أو تكون على الأقل على شكل جداء مناقلات، نقول

(i) $a = (i_1 i_2 i_3 ...)...$ أو

(ii) $a = (i_1 i_2)(i_3 i_4)...$

في الحالة الأولى، a تحرك عددين، نقول بأنهمـــا i_4, i_5، مـــا عـــدا i_1, i_2, i_3، لأن $a \neq (i_1 i_2 i_3), (i_1 ... i_4)$. لتكن $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} g\,a\,g^{-1} = (i_1 i_2 i_4 ...)... \in N$، وهي مختلفة عــن a (لأن تؤثر بشكل مختلف على i_2). لهذا $a' \stackrel{\text{def}}{=} a_1 a^{-1} \neq 1$ لكــن $a' = g\,a\,g^{-1}a^{-1}$ يثبت i_2 و كل العناصر ما عدا $i_1, ..., i_5$ تكون مثبتة بـــ a - ولذلك فهي تثبـــت عناصـــر أكثر من a.

في الحالة الثانية، نشكل g, a_1, a' كما في الحالة الأولى مع i_4 كما في (ii) و i_5 أي عنصر مختلف عن i_1, i_2, i_3, i_4. عندئذٍ $a_1 = (i_1 i_2)(i_4 i_5)...$ تكون مختلفة عن a لأنها تؤثر بشكل مختلف على i_4. لهذا $a' = a_1 a^{-1} \neq 1$، لكن a' يثبت i_1 و i_2، و كل العناصر $\neq i_1, ..., i_5$ لا تثبت من قبل a - ولذلك فهي تثبت عناصر أكثر من a بواحد على الأقل.

نتيجة 36.4 من أجل $n \geq 5$، إن الزمر الجزئية الناظمية في S_n هي 1، A_n، و S_n فقط.

البرهان. إذا كانت N ناظمية في S_n، عندئذٍ $N \cap A_n$ ناظمية في A_n. لذلك إما $N \cap A_n = A_n$ أو $N \cap A_n = \{1\}$. في الحالة الأولى، $N \supset A_n$، التي دليلها يساوي 2 في S_n، ولذلك فإن $N = A_n$ أو S_n. في الحالة الثانية، يكون التطبيق $x \mapsto xA_n : N \to S_n / A_n$ غامراً، ومنه فإن N من الرتبة 1 أو 2، لكن لا يمكن أن تكون رتبتها 2 لأنه لا يوجد صف ترافق في S_n (ما عدا $\{1\}$) يتألف من عنصر واحد.

37.4 يوجد وصف لصفوف الترافق في A_n، التي من المحتمل أن تستنتج ببساطة من أجل $n \geq 5$.

38.4 يقال عن الزمرة G أنها قابلة للحل إذا وجدت زمراً جزئية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_{i-1} \supset G_i \supset ... \supset G_r = \{1\}$$

بحيث تكون كل من G_i ناظمية في G_{i-1} و كل زمرة قسمة G_{i-1}/G_i تكون تبديلية. لهذا فإن A_n (وأيضاً S_n) ليست قابلة للحل إذا كان $n \geq 5$. ليكن $f(x) \in [x]$ من الدرجة n.

في نظرية جالوا، ترتبط بـ f زمرة جزئية G_f من زمر تبديلات جذور f، ويبين بان جذور f يمكن الحصول عليها من معاملات f بالعمليات الجبرية من الجمع، الطرح، الضرب، القسمة، و الاستنتاج للجذر m إذا وفقط إذا كان G_f قابلاً للحل (نظرية غالوا). لكل n، يوجد على الأقل كثيرة حدود f من الدرجة n بحيث $G_f \approx S_n$ وبالتالي فإن (عندما $n \geq 5$) الكثير من كثيرات الحدود تكون غير قابلة للحل بدلالة الجذور.

خوارزمية Tood – Coxeter

لتكن G زمرة تمثل بشكل منتــه، ولــتكن H زمــرة جزئيــة مولــدة بمجموعــة . إن خوارزمية Tood- Coxeter[15] هي استراتيجية لكتابة فيما بعد مجموعة المرافقات اليسارية للزمرة H في G مع تأثير G على المجموعة.

لقد وضحتها مع مثال (من Artin 1991, 6.9 الذي يزودنا بتفاصيل أكثر، لكن نلاحظ بأنــه يركب التبديلات في الاتجاه المعاكس لتركيبنا).

لتكن $G=\langle a,b,c \mid a^3,b^2,c^2,cba\rangle$ و لتكن H زمرة جزئية مولدة بــ c (بكــلام أدق، H زمرة جزئية مولدة بعنصر من G الممثلة بالكلمة المختزلة c). تتــصف عمليــة G على مجموعة المرافقات بتأثير المولدات، التي يمكن أن تحقق القوانين الآتية:

(i) كل مولد (a,b,c في مثالنا) يؤثر كتبديلة.

(ii) العلاقات (a^3,b^2,c^2,cba في مثالنا) تؤثر بشكل تافه.

(iii) مولدات H (c في مثالنا) تثبت المرافقة $1H$.

(iv) العملية على المرافقات متعدية.

إن الاستراتيجية المتبعة لاستنتاج المرافقات، يرمز لها $1,2,\ldots$ حيــث $1=1H$، يكــون ضرورياً.

القانون(iii) يخبرنا ببساطة أن $c1=c$. سنطبق الآن القانونين الأول و الثاني. بما أنه لا نعلم من هو $a1$، لنرمز بما يلــي $2:a1=2$. و بــشكل مــشابه، لــيكن $a2=3$. الآن $a3=a^3 1$، ومن (ii) يجب أن يساوي 1. لهذا، نكون قد استنتجنا المرافقات الثلاثة $1,2,3$، التبديل وفق a كما يلي:

$$1 \overset{a}{\mathbf{a}} 2 \overset{a}{\mathbf{a}} 3 \overset{a}{\mathbf{a}} 1.$$

ما هي $b1$؟ لا نعلم، نستنتج بحــذر مرافقــة أخــرى $b1=4$. الآن $b4=1$ لأن $b^2=1$، وبالتالي يكون لدينا

$$1 \overset{b}{\mathbf{a}} 4 \overset{b}{\mathbf{a}} 1.$$

بقي لدينا العلاقة cba. نعلم بأن $a1=2$، لكن لا نعلم ما $b2$، ومنه نضع $b2=5$:

---

[15] لحل المسألة، يجب أن تنتهي الخوارزمية دائماً فــي زمــن منتــه مــع الجــواب صــحيحاً المــسألة. إن خوارزمية Tood – Coxeter لن تحل المسألة المحددة فيما إذا كان التمثيل المنتهي يعرف زمرة منتهية (في الحقيقة، لا توجد خوارزميات كهذه). إنها تقوم، على أي حال، بحل مسألة تحديد رتبة الزمرة المنتهيــة مــن التمثيل المنتهي للزمرة (نستخدم الخوارزمية مع H الزمرة الجزئية التافهة 1.

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 5$$

من (iii) $c1=1$، و بتطبيق (ii) على cba يكون لدينا $1=c5$. لذلك، بالعودة إلى (i) سيكون لينا $1=5$،

نسقط 5، وبهذا يكون الآن $1=b2$. بما أن $1=b4$ سيكون لدينا $2=4$، ولذلك يمكننا أن نسقط 4 أيضاً.

يمكن أن نمثل ما عرفناه في القائمة الآتية:

	a		a		a		b		b		c		c		a		b		c	
1		2		3		**1**		2		**1**		1		**1**		2		1		**1**
2		3		1		**2**		1		**2**				**2**		3				**2**
3		1		2		**3**				**3**				**3**		1		2		**3**

الزاوية السفلية اليمنى، المطبقة من (ii)، تبين لنا بأن $3=c2$. وبالتالي يكون أيضاً $c3=2$، وعندئذٍ يحدد هذا بقية القائمة:

	a		a		a		b		b		c		c		a		b		c	
1		2		3		**1**		2		**1**		1		**1**		2		1		**1**
2		3		1		**2**		1		**2**		3		**2**		3		3		**2**
3		1		2		**3**		3		**3**		2		**3**		1		2		**3**

نكون بذلك قد حصلنا على ثلاث مرافقات والتي يؤثر عليها a,b,c كما يلي

$$a=(123)\; b=(12)\; c=(23)$$

وبدقة أكثر، يمكننا أن نكتب فيما بعد التطبيق $G\to S_3$ و المؤلفة بالقوانين السابقة. من مبرهنة (Artin 1991, 9.10) التي تنص على أن هذا في الحقيقة يصف تأثير G على G/H. بما أن العناصر الثلاثة (123)، (12)، و (23) تولد S_3، هذا يبين بأن تأثير G على G/H يؤدي إلى التماثل $G\to S_3$، وإن H زمرة جزئية من الرتبة 2.

في Artin 1991, 6.9 ، اكتشف كيفية تحويل هذه الطريقة إلى خوارزمية بحيث، عندما تنجح في استخراج قائمة الثوابت، ستكون في الحقيقة قد استنتجت القائمة الصحيحة،

هذه الخوارزمية منجزة في Maple ، باستثناء تلك التي تحسب التأثيرات على المرافقات اليسارية. يوجد هنا نسخة عن ذلك:

```
>with (group) ;  [loads the group theory package . ]
>G:=grelgroup ({a,b,c},{[a,a,a],[b,b],c,c],[a,b,c]}) ;  [defines G to have
generators a,b,c and relations  aaa,  bb,  cc,  abc]
>H:=subgrel ({x=[c]},G) ;  [defines H to be the subgroup generated by c]

>permrep (H) ;
```

Permgroup (3, a=[[1,2,3],b=[1,2],c=[2,3]])
[computes the acthon of G on the set of right cosets of H in G].

التأثيرات الابتدائية (Primitive action)

لتكن G زمرة التأثير على المجموعة X، و ليكن p تجزئة لـــ X. نقول بأن p مثبـــت (stabilized) G إذا كان

$$A \in p \Rightarrow g\,A \in p$$

مثال 39.4 (a) الزمرة الجزئية $G = \langle (1234) \rangle$ من S_4 تثبت التجزئة $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ من $\{1,2,3,4\}$.

(b) نفرض أن $X = \{1,2,3,4\}$ مع مجموعة رؤوس المربـــع علـــى D_4 التـــي تـــؤثر بالطريقة الاعتيادية، بالتحديد، مع $r = (1234), s = (24)$. عندئـــذٍ D_4 يثبـــت التجزئـــة $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$.

(c) لتكن X مجموعة تجزئات $\{1,2,3,4\}$ إلى مجموعتين، كل منهمـــا مؤلـــف مـــن عنصرين. عندئذٍ فإن S_4 تؤثر على X، و $\operatorname{Ker}(S_4 \to \operatorname{Sym}(X))$ هي الزمرة الجزئية V المعرفة في (31.4).

إن الزمرة G تثبت دائماً التجزئات التافهة لـــ X، وبالتحديد، مجموعة كل المجموعات الجزئية في X والمؤلفة من عنصر واحد، و $\{X\}$. عندما نثبت فقط هذه التجزئات، نقول بأن التأثير ابتدائي (primitive)، وفي الحالة الأخرى يكون غير ابتدائي (primitive)، يقال بأن الزمرة الجزئية في $\operatorname{Sym}(X)$ (مثلاً، في S_n) ابتدائية إذا أثرت بشكل ابتدائي علـــى X. من الواضح، بأن S_n هي زمرة تأثير ابتدائية على نفسها، لكن المثال 39.4b يبين بأن D_4، تعتبر كزمرة جزئية في S_4 بالطريقة المبينة، ليس ابتدائياً.

مثال 40.4 إن التأثير المتعدي المضاعف يكون ابتدائياً: إذا ثبت

$$\{\{x, x', \ldots\}, \{y, \ldots\} \ldots\},$$

عندئذٍ لن يكون هناك عنصراً يرسل (x, x') إلى (x, y).

ملاحظة 41.4 إن G - مدار يشكل تجزئة لـــ X التي تكون مثبتة بـــ G. إذا كان التأثير ابتدائياً، عندئذٍ يجب أن تكون التجزئة إلى مدارات هي إحدى التجزئات التافهة. بالتالي

إذا كان التأثير ابتدائياً $\Leftarrow$ التأثير متعدٍ أو تافه ($gx = x$ لكل g, x)

بالنسبة لباقي هذه التأثيرات، تكون G زمرة منتهية تؤثر على المجموعة X بـشكل متعـدٍ ومؤلفة من عنصرين على الأقل.

قضية 42.4 تؤثر الزمرة G بشكل غير ابتدائي إذا وفقط إذا وجدت مجموعة جزئيـة A من X ومؤلفة من عنصرين على الأقل بحيث يكون،

(18) لكل $g \in G$، إما $gA = A$ أو $gA \cap A = \phi$.

البرهان. $\Leftarrow$: إن التجزئة π المثبتة بالزمرة G تحتوي على مجموعة مثل A.

$\Rightarrow$: من A، يمكن أن نشكل تجزئة $\{A, g_1A, g_2A, \ldots\}$ لـ X، المثبتة بـ G.

تسمى المجموعة الجزئية A من المجموعة X و التي تحقـق العلاقـة (18) بالخليـة (block).

قضية 43 .4 لتكن A خلية في X مع $|A| \geq 2$ و $A \neq X$. عندئذٍ لأي $x \in A$،

$$\operatorname{Stab}(x) \subsetneqq \operatorname{Stab}(A) \subsetneqq G$$

البرهان. لدينا $\operatorname{Stab}(A) \supset \operatorname{Stab}(x)$ لأن

$$gx = x \Rightarrow gA \cap A \neq \phi \Rightarrow gA = A$$

ليكن $y \in A, y \neq x$. بما أن G تؤثر بشكل متعدي على X، يوجـد $g \in G$ بحيـث يكون $gx = y$. عندئذٍ $g \in \operatorname{Stab}(A)$، لكن $g \notin \operatorname{Stab}(x)$.

لتكن $y \notin A$. يوجد $g \in G$ بحيث إن $gx = y$، و عندئذٍ $g \notin \operatorname{Stab}(A)$.

مبرهنة 44.4 تؤثر الزمرة G بشكل ابتدائي على X إذا وفقط إذا كانت، من أجل عنـصر واحد (وبالتالي للكل) x من X، $\operatorname{Stab}(x)$ الزمرة الجزئية الأعظمية في G.

البرهان. إذا لم تؤثر G بشكل ابتدائي على X، عندئذٍ (انظر 42.4) توجد الخلية $A \subsetneqq X$ والمؤلفة من عنصرين على الأقل، ومن (43.4) نبين بأن $\operatorname{Stab}(x)$ لن تكون أعظمية لأي $x \in A$.

العكس، بفرض أنه يوجد x من X وزمرة جزئية H بحيث يكون

$$\operatorname{Stab}(x) \subsetneqq H \subsetneqq G$$

عندئذٍ أدعي بأن $A = Hx$ خلية $\neq X$ مؤلفة من عنصرين على الأقل.

لأن $H \neq \operatorname{Stab}(x)$، $Hx \neq \{x\}$، ومنه $\{x\} \subsetneqq A \subsetneqq X$.

إذا كان $g \in H$ ، عندئذٍ $gA = A$. أما إذا كان $g \notin H$ ، عندئذٍ gA تكون منفصلة عن A : لذلك نفرض $ghx = h'x$ لبعض عناصر $h' \in H$ ، عندئذٍ $h'^{-1}gh \in \mathrm{Stab}(x) \subset H$ ، ونقول بأن $h'^{-1}gh = h''$ ، و $g = h'h''h^{-1} \in H$.

تمارين

4-1 لتكن H_1 و H_2 زمرتين جزئيتين في الزمرة G. بين بأن تطبيقات G- مجموعة $G/H_1 \to G/H_2$ تكون تطبيقات التقابل القانونية مع العناصر gH_2 من G/H_2 بحيث إن $H_1 \subset gH_2g^{-1}$.

4-2 (a) برهن بأن الزمرة المنتهية لا يمكن أن تساوي اجتماعاً لصفوف الترافق لزمر جزئية فعلية.

(b) أعط مثالاً عن مجموعة جزئية فعلية S من زمرة منتهية G بحيث يكون $G = \bigcup_{g \in G} gsg^{-1}$.

4-3 برهن أن أي زمرة غير تبديلية من الرتبة p^3 ، p عدد أولي فردي، متماثلة مع إحدى الزمرتين المبنيتين في (3.13,3.14).

4-4 ليكن p أصغر عدد أولي يقسم $(G:1)$ (بفرضه منته). بيّن بأن أي زمرة جزئية في G دليلها p تكون ناظمية.

4-5 بيّن بأن أي زمرة من الرتبة $2m$ ، m عدد فردي، تحتوي على زمرة جزئية دليلها 2. (باستخدام مبرهنة كايلي 1.21)

4-6 لتكن $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$.

(a) بيّن بأن $(G:1) = 168$.

(b) لتكن X مجموعة من المستقيمات المارة من مبدأ الإحداثيات لـ $\mathbb{F}_2^3$ ، بيّن بأن X تحوي على 7 عناصر، و أنه يوجد تشاكل متباين قانوني $G \to \mathrm{Sym}(X) = S_7$.

(c) استخدم أشكال جوردان القانونية لتبين بأن G تحوي على ست صفوف ترافق، مع 1,21,42,56,24، و 24 عنصر على الترتيب. [نلاحظ بأنه إذا كانت M حرة $\mathbb{F}_2[\geq]-\mathrm{module}$ من المرتبة واحد، عندئذٍ $\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[a]}(M) = \mathbb{F}_2[a]$.]

(d) استنتج بأن G بسيطة.

4-7 لتكن G زمرة. إذا كان $\mathrm{Aut}(G)$ دائرية، برهن بأن G تبديلية، وأنه، إذا كانت G منتهية، برهن بأن G دائرية.

4-8 بيّن بأن S_n مولدة بالعناصر $(12),(13),...,(1n)$، و بالعناصر $(12),(23),...,(n-1n)$ أيضاً.

4-9 لتكن K صف ترافق من زمرة منتهية G محتواة في زمرة جزئية ناظمية H في G. برهن أن K اجتماع لـ k صف ترافق بحجوم متساوية في H، حيث $k=(G:H.C_G(x))$ لأي $x \in K$.

4-10 (a) ليكن $s \in A_n$. من التمرين 4-9 نعلم بأن صفوف الترافق لـ s في S_n إما تبقى صف ترافق واحد في A_n أو ينهي كاجتماع صفي ترافق لهما نفس الحجم. بيّن بأن الحالة الثانية محققة $\Leftrightarrow$ s لا تتبادل مع أي تبديلة فردية $\Leftrightarrow$ تعرف تجزئة n بـ s المؤلفة من أعداد صحيحة فردية مختلفة.

(b) لكل صف ترافق K في A_7، أعط شكل K، وحدد $|K|$.

4-11 لتكن G زمرة مع المولدات a,b و العلاقات $a^4=1=b^2, aba=bab$.

(a) (4 pts) استخدم خوارزمية Tood- Coxeter (مع $H=1$) لتعرف صورة G بالنسبة للتشاكل $G \to S_n, n=(G:1)$، المعطى بمبرهنة كايلي 1.11.[لا نحتاج إلى أن تتضمن كل الخطوات، سنعمل بشكل ملخص فقط.]

(b) (1.pt) استخدم Maple لتتأكد من إجابتك.

4-12 بيّن بأنه إذا كان تأثير G على X ابتدائياً و فعالاً، عندئذٍ تأثير أي زمرة جزئية ناظمية $H \neq 1$ من G يكون متعدياً.

4-13 (a) تأكد من أن A_4 تحوي على 8 عناصر من الرتبة 3، و 3 عناصر من الرتبة 2. وبالتالي لا يحوي أي عنصر من الرتبة 6.

(b) برهن بأن A_4 لا تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 6 (cf. 1.29). (استخدم 4.23).

(c) برهن بأن A_4 هي الزمرة الجزئية الوحيدة من S_4 من الرتبة 12.

4-14 لتكن G زمرة مع زمرة جزئية دليلها r. برهن أن

(a) إذا كانت G بسيطة، عندئذٍ $(G:1)$ يقسم $r!$.

(b) إذا كان $r=2,3$، أو 4، عندئذٍ لا يمكن أن تكون G بسيطة.

(c) يوجد زمرة بسيطة غير تبديلية مع زمرة جزئية دليلها 5.

15-4 برهن أن S_n متماثلة مع زمرة جزئية من A_{n+2}.

16-4 لتكن H و K زمرتين جزئيتين من الزمرة G. إن المرافقة الثنائية الجانب لـــ H و K في G هي مجموعة من الشكل

$$HaK = \{ hak \mid h \in H , k \in K \}$$

لبعض من العناصر $a \in G$.

(a) بيّن بأن المرافقة الثنائية الجانب لـــ H و K في G تشكل تجزئة للزمرة G.

(b) لتكن $H \cap aKa^{-1}$ تؤثر على $H \times K$ بالشكل $b(h,k) = (hb, a^{-1}b^{-1}ak)$.

بيّن بأن مدارات هذا التأثير هي بالضبط تركيبات التطبيق $(h,k) \mapsto hak : H \times K \to HaK$.

(c) (يحسب عدد المرافقات الثنائية الجانب بالصيغة). باستخدام (b) بيّن بأن

$$|HaK| = \frac{|H||K|}{|H \cap aKa^{-1}|}$$

الفصل الخامس

مبرهنات سيلو؛ تطبيقات

The Sylow Theorems; Application

في هذا الفصل، ستكون كل الزمر منتهية.

لتكن G زمرة وليكن p عدداً أولياً يقسم $(G:1)$. تدعى كل زمرة جزئية من G بـــ p - زمرة سيلو الجزئية في G إذا كانت رتبتها أكبر قوة للعدد p بحيث تقســم $(G:1)$. تنص مبرهنات سيلو على أنه يوجد p - زمر سيلو الجزئية لكل عدد أولي يقــسم $(G:1)$، بحيث تكون p - زمر سيلو الجزئية مترافقة بالنسبة للعدد المثبت p، وأن كل p - زمــرة جزئية في G محتواة في زمرة جزئية كهذه، على أي حال، تحدد المبرهنات عدد p - زمر سيلو الجزئية المحتملة في G.

مبرهنات سيلو

في البراهين، نستخدم دائماً: إذا كان O مداراً للزمرة الجزئية H التي تؤثر على المجموعة X، و $x_0 \in O$، عندئذٍ من التطبيق $H \to X, h \mapsto hx_0$ ينتج التطبيق التقابل
$$H/\mathrm{Stab}(x_0) \to O;$$
انظر (7.4). لذلك
$$(H:\mathrm{Stab}(x_0)) = |O|$$
بشكل خاص، عندما تكون H p - زمرة، $|O|$ قوى لعدد أولي p: فإن O يتــألف مــن عنصر واحد، أو $|O|$ تقبل القسمة على p. بما أن X اجتماع منفصل مــن المــدارات، نستنتج:

تمهيدية 1.5 لتكن H p - زمرة تؤثر على مجموعة منتهية X، و لتكن X^H مجموعة النقاط المثبتة بـــ H، عندئذٍ
$$|X| \equiv |X^H| \pmod{p}$$
عندما تطبق التمهيدية على p - زمرة H تؤثر على نفسها بالترافق، نجد بأن

$$\left(Z\left(H\right):1\right)\equiv\left(H:1\right)\left(\bmod p\right)$$

وبالتالي

$p\left|\left(Z\left(H\right):1\right)\right.$ (انظر برهان 16.4).

مبرهنة 2.5 (سيلو 1) لتكن G زمرة منتهية، وليكن p عدداً أولياً. إذا كان $p^r\left|\left(G:1\right)\right.$، عندئذٍ فإن G تحوي على زمرة جزئية من الرتبة p^r.

البرهان. بالعودة إلى (17.4)، يكفي أن نبرهن أن p^r أكبر قوى p تقسم $\left(G:1\right)$، و من الآن فصاعداً سنفرض بأن $\left(G:1\right)=p^r m$ حيث m لا تقبل القسمة على p.

لتكن

$$X=\{\text{مجموعة جزئية في } G \text{ مع العناصر } p^r\}$$

مع تأثير G المعرف بالشكل

$$G\times X\to X,\ \left(g,A\right)\mapsto gA\overset{\text{def}}{=}\left\{ga\left|a\in A\right.\right\}$$

لأي A $ha_0:H\to A$ $a_0\in A,h\mapsto$ يكون غامراً (قانون الاختزال)، ولذلك $\left(H:1\right)\leq A=p^r$. في المعادلة

$\left(G:1\right)=p^r m$، $\left(H:1\right)\leq p^r$، وأن $\left(G:H\right)$ عدد العناصر في مدار A. إذا أمكننا إيجاد A بحيث لا يقسم p عدد العناصر في مداره، عندئذٍ يمكن أن نستنتج بأن (بالنسبة إلى مجموعة مثل A)، $H=\mathrm{Stab}\,A$ من الرتبة p^r.

إن عدد العناصر في X هي

$$\left|X\right|=\binom{p^r m}{p^r}=\frac{\left(p^r m\right)\left(p^r m-1\right)\ldots\left(p^r m-i\right)\ldots\left(p^r m-p^r+1\right)}{p^r\left(p^r-1\right)\ldots\left(p^r-i\right)\ldots\left(p^r-p^r+1\right)}$$

نلاحظ بأن، ولأن $i<p^r$، قوى p التي تقسم $p^r m-i$ هي قوى p التي تقسم i. نفس الحالة تكون صحيحة من أجل p^r-i. لذلك الحدود المتقابلة في الأعلى والأسفل قابلة للقسمة على القوى نفسها لـ p، وبهذا p لا يقسم $\left|X\right|$. لأن المدار يشكل تجزئة لـ X،

$$\left|X\right|=\sum\left|O_i\right|,\ \text{مدارات مختلفة } O_i$$

ومنه فإن أحد $\left|O_i\right|$ على الأقل لا يقبل القسمة على p.

مثال 3.5 ليكن $\mathrm{F}_p=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$، الحقل مع p عنصر، وليكن $G=\mathrm{GL}_n\left(\mathrm{F}_p\right)$. المصفوفات من النوع $n\times n$ في G، وهي بدقة أكثر تلك التي تأخذ عناصر أعمدتها من قاعدة F_p^n. لهذا، يمكن أن يكون العمود الأول أي متجه غير معدوم في F_p^n، يوجد p^n-1

منها، يمكن أن يكون العمود الثاني أي متجه لا يقع في مجال المتجه الأول، يوجـد $p^n - p$ منها، و هكذا. لذلك، إن رتبة G تساوي

$$\left(p^n - 1\right)\left(p^n - p\right)\left(p^n - p^2\right)\ldots\left(p^n - p^{n-1}\right)$$

وبالتالي فإن قوى p التي تقسم $(G:1)$ هي $p^{1+2+\ldots+(n-1)}$. نعتبر المصفوفات من الشكل

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

إنها تشكل زمرة جزئية U من الرتبة $p^{n-1}p^{n-2}\ldots p$، التي تكون p - زمرة سيلو الجزئية G.

ملاحظة 4.5 تعطي المبرهنة برهاناً آخر لمبرهنة كوشي (13.4). إذا كان p عـدداً أوليـاً يقسم $(G:1)$، عندئذٍ سـتحوي G علـى زمـرة جزئيـة H مـن الرتبـة p، و أي $g \in H, g \neq 1$، هو عنصر من G من الرتبة p.

ملاحظة 5.5 يمكن تعديل برهان المبرهنة 5.2 ليظهر بشكل مباشر بأن يكون لكل قـوة p^r للعدد p التي تقسم $(G:1)$ توجد زمرة جزئية H في G من الرتبـة p^r. مـرة أخـرى نكتب $(G:1) = p^r m$ و نعتبر المجموعة X المؤلفة من جميع المجموعات الجزئية مـن الرتبة p^r. في هذه الحالة، p^{r_0} أكبر قوة للعدد p والقاسم لـ $|X|$ هو أكبـر قـوى p يقسم m، وبالتالي يوجد مدار في X بحيث تكون رتبته لا تقبل القسمة على p^{r_0+1}. مـن أجل A في ذلك المدار ، يبين الحساب نفسه بأن $\mathrm{Stab}(A)$ يحوي p^r عنـصر. ننـصح القارئ بأن يكتب التفاصيل.

مبرهنة 6.5 (سيلو II) لتكن G زمرة منتهية، ولـتكن $|G| = p^r m$ حيـث m لا تقبـل القسمة على p.

(a) أي p - زمرتي سيلو جزئيتين تكونان مترافقتين.

(b) ليكن s_p عدد p - زمر سيلو الجزئية في G، عندئذٍ $s_p \equiv 1 \bmod p$ و $s_p \mid m$.

(c) كل p - زمرة جزئية تكون محتواة في p - زمرة سيلو الجزئية.

لتكن H زمرة جزئية في G. نتذكر من (4.6, 4.8) بأن منظم H في G هو

$$N_G(H) = \left\{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \right\},$$

و إن عدد مرافقات H في G هو $(G : N_G(H))$.

تمهيدية 7.5 لتكن P p - زمرة سيلو الجزئية في G، ولتكن H p - زمرة جزئية. إذا كان H منظم P، أي أن، إذا كان $H \subset N_G(P)$، عندئذٍ $H \subset P$. وبشكل خاص، لا توجد p - زمرة سيلو جزئية في G تنظم P غير الزمرة P.

البرهـــان. بما أن P و H زمرتان جزئيتان من $N_G(P)$ و P ناظمية في $N_G(P)$، يكـــون HP زمـــرة جزئيـــة، و $HP/P \quad H/H \cap P$ (بتطبيـــق 1.45). لـــذلك فـــإن $(HP:P)$ قوة للعدد p (حيث إننا نستخدم هنا H p - زمرة)، لكن

$$(HP:1)=(HP:P)(P:1),$$

و $(P:1)$ هي أكبر قوة لـــ p تقسم $(G:1)$، وبالتالي ستكون أكبر قوة تقسم $(HP:1)$، لهذا $(HP:P)=p^0=1$، و $H \subset P$.

برهان (سيلو II) (a) لتكن X مجموعة p - زمر سيلو الجزئية في G، ولتكن G تؤثر على X بالترافق،

$$(g,P)\mapsto gPg^{-1}:G\times X\to X.$$

ليكن O أحد مدارات G - مدار: علينا أن نبرهن بأن O هو كل X.

لتكن $P\in O$، وليكن P يؤثر على O من خلال تأثير G. إن هذه G - مدار واحـــدة من الممكن أن تتجزأ إلى العديد من P - مدار، إحداها ستكون $\{P\}$. في الحقيقـــة إن هـــذا المدار المؤلف من نقطة واحدة هو المدار الوحيد لأن

$$P \text{ ينظم } Q \Leftrightarrow \{Q\} \text{ هو } P \text{ - مدار}$$

حيث نعلم بأن (7.5) تحققت فقط عندما $Q=P$. وبالتالي فإن عدد العناصر في كـــل p - مدار باستثناء $\{P\}$ قابل للقسمة على p، و يكون لدينا $|O|\equiv 1 \bmod p$.

بفرض أنه يوجد $P\notin O$. وليكن P يؤثر على O مرةً أخرى، لكن هذه المرة المناقشة ستبين بأنه لا يوجد مدارات مؤلفة من نقطة واحدة، ولذلك فإن عدد العناصر فـــي كـــل P - مدار يقبل القسمة على P. وبالتالي ينتج بأنه $\# O$ قابل للقسمة على p، الذي يناقض مـــا برهن في الفقرة الأخيرة. لا يمكن أن يوجد كالزمرة P، ولذلك فإن O هي كل X.

(b) بما أن s_p هو الآن عدد العناصر في O، يمكن أن نبين أيضاً بأن $s_p\equiv 1 \bmod p$

ليكن P p - زمرة سيلو الجزئية في G. بالعودة إلى (a)، يكون s_p عدد مرافقـــات P، و التي تساوي

$$(G:N_G(P))=\frac{(G:1)}{(N_G(P):1)}=\frac{(G:1)}{(N_G(P):P)(P:1)}=\frac{m}{(N_G(P):P)}$$

هذا تحليل m.

(c) لتكن H p - زمرة جزئية في G، و لتكن H تؤثر على المجموعة X المؤلفة من p - زمرة سيلو الجزئية بالترافق. لأن $|X| = s_p$ لا تقبل القسمة علـــى p، يجــب أن تكون X^H غير خالية (التمهيدية 1.5)، أي أن، أحد H - مدار على الأقل يتألف من p - زمرة سيلو جزئية واحدة. لكن عندئذٍ H تنظم P ومن التمهيدية 7.5 ينتج بأن $H \subset P$.

نتيجة 8.5 تكون p - زمرة سيلو الجزئية ناظمية إذا وفقط إذا كانـــت p - زمـــرة ســـيلو الجزئية الوحيدة.

البرهـــان. لتكن p - زمرة سيلو الجزئية P في G. إذا كانت P ناظمية، عندئذٍ (a) مـــن سيلو II ينتج بأن p - زمرة سيلو الجزئية الوحيدة. الحالة المعاكسة تنتج من (6.3c) (حيث تبين، في الحقيقة، بأن P مميزة أيضاً).

نتيجة 9.5 بفرض أن G زمرة تحوي فقط على p - زمرة سيلو جزئية لكل عدد أولي يقسم رتبتها. عندئذٍ فإن G جداء مباشر لـــ p - زمر سيلو الجزئية.

البرهان. لتكن $P_1,...,P_k$ زمر سيلو الجزئية في G، ولتكن $|P_i| = p_i^{r_i}$، p_i أعداد أولية مختلفة. لأن كل من P_i تكون ناظمية في G، يكون الجداء $P_1...P_k$ زمرة جزئية ناظميـــة في G. سنبرهن بالاستقراء على k بأنها من الرتبة $p_1^{r_1}...p_k^{r_k}$. إذا كان $k = 1$، عندها لا يوجد شيء لبرهانه، ولذلك يمكن أن نفرض بأن $k \geq 2$ و أن $P_1...P_{k-1}$ مـــن الرتبـــة $p_1^{r_1}...p_{k-1}^{r_{k-1}}$. عندئذٍ $P_1...P_{k-1} \cap P_k = 1$، لذلك تبين (50.1) بأن $(P_1...P_{k-1})P_k$ هـــو جداء مباشر للزمرتين $P_1...P_{k-1}$ و P_k، وبالتالي فهي من الرتبـــة $p_1^{r_1}...p_k^{r_k}$. بتطبيـــق الآن (51.1) على كامل مجموعة زمر سيلو الجزئية في G يتبين بـــأن G هـــي جـــداؤها المباشر.

مثال 10.5 لتكن $G = \mathrm{GL}(V)$ حيث V فضاء متجهي من البعد n علـــى F_p. يوجـــد وصف هندسي لزمر سيلو الجزئية في G. إن المعلم التام (full flag) F في V هو متتالية من الفضاءات الجزئية

$$V = V_n \supset V_{n-1} \supset ... \supset V_i \supset ... \supset V_1 \supset \{0\}$$

حيث $\dim(V_i) = i$. بإعطاء مثل المعلم F، لتكن $U(F)$ مجموعـــة كـــل التطبيقـــات الخطية $\alpha : V \to V$ بحيث إن

(a) $\alpha(V_i) \subset V_i$ لكل i، و

(b) التشاكلات الذاتية على V_i / V_{i-1} تنتج التطبيق المحايد بالنسبة لـــ α.

أدعي بأن $U(F)$ p - زمرة سيلو الجزئية في G. يمكن أن نبني القاعــدة $\{e_1,...,e_n\}$ لـــ V بحيث $\{e_1\}$ قاعدة V_1، $\{e_1,e_2\}$ قاعدة V_2، وهكذا. بالنـــسبة لهـــذه القواعـــد، إن مصفوفات عناصر $U(F)$ هي بالضبط عناصر الزمرة U في (5.3).

لتكن $g \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$. $gF \overset{def}{=} \{gV_n, gV_{n-1},...\}$ هو معلـــم تـــام أيـــضاً، و لـــيكن $U(gF) = g.U(F).g^{-1}$. من (a) في سيلو II، نرى بأن p - زمر سيلو الجزئية فـــي G. هي وبدقة زمر من الشكل $U(F)$ لبعضٍ من المعلم التام F.

11.5 تستخدم بعض الكتب ترقيمات مختلفة لزمر سيلو. لقد اعتمدت على الترقيمات الأصلية (سيلو 1872) بشكل أساسي.

التقريبات البديلة لمبرهنات سيلو

ننسى بأننا برهنا على مبرهنات سيلو.

مبرهنة 12.5 لتكن G زمرة، ولتكن P p - زمر سيلو الجزئية في G. لكل زمرة جزئية H في G، يوجد $a \in G$ بحيث يكون $H \cap aPa^{-1}$ p - زمر سيلو الجزئية في H.

البرهان. نتذكر من (من التمرين 16-4) بأن G عبارة عن اجتماع منفصل لمرافقات ثنائيـــة الجانب لـــ H و P. ولذلك

$$|G| = \sum_a |H_a P| = \sum_a \frac{|H||P|}{|H \cap aPa^{-1}|}$$

بحيث يكون المجموع على مجموعة ممثلات المرافقات الثنائية الجانب. بالقسمة علـــى $|P|$ نجد بأن

$$\frac{|G|}{|P|} = \sum_a \frac{|H|}{|H \cap aPa^{-1}|}$$

و لذلك يوجد a بحيث يكون $(H : H \cap aPa^{-1})$ لا تقبل القسمة علـــى p. مـــن أجـــل عنصر مثل a، تكون $H \cap aPa^{-1}$ p - زمرة سيلو الجزئية في G.

برهان (سيلو I) من مبرهنة كايلي (21.1)، تكون G مغمورة في S_n، و S_n مغمورة في $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_p)$ (انظر 1.7). كما أن $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_p)$ يحوي على p - زمرة سيلو الجزئية (انظر 5.3)، و كذلك أيضاً G.

برهان (سيلو II(a,c)) لتكن P p - زمرة سيلو الجزئية في G، ولتكن P' p - زمـــرة سيلو الجزئية الوحيدة في G عندئذٍ تكون P' p - زمرة سيلو الوحيدة من P'، ولذلك فإن

المبرهنة تبين بأن $aPa^{-1} \supset P'$ لبعض a حيث $H = P'$. وهذا ينتج (a) و (c) من سيلو II.

أمثلة

نطبق ما تعلمناه لنحصل على معلومات جديدة عن الزمر برتب مختلفة.

13.5 (الزمر من الرتبة 99) لتكن G من الرتبة 99. من مبرهنات سيلو نستنتج بأن G تحوي على زمرة جزئية واحدة H على الأقل من الرتبة 11، و في الحقيقة $s_{11} \left| \frac{99}{11} \right.$ و $s_{11} \equiv 1 \bmod 11$. و بالتالي فإن $s_{11} = 1$، و H ناظمية. بشكل مشابه، $s_9 | 11$ و $s_9 \equiv 1 \bmod 3$، ومنه 3- زمرة سيلو الجزئية تكون أيضاً ناظمية. وبالتالي فإن G متماثلة مع الجداء المباشر لـ p - زمر سيلو الجزئية لها (9.5)، والتي كل منهما تبديلية (18.4)، ومنه فإن G تبديلية.

هنا برهان بديل. نثبت كما سبق بأن 11- زمرة سيلو الجزئية N في G تكون ناظمية. إن 3- زمرة سيلو الجزئية Q عبارة عن تطبيقات تقابل على G/N، و بالتالي $G = N \times Q$. بقي أن نحدد تأثير Q على N بالترافق. لكن $\operatorname{Aut}(N)$ دائرية من الرتبة 10 (انظر 3.4)، و بهذا يوجد تشاكل تافه واحد فقط $Q \to \operatorname{Aut}(N)$. وبالتالي فإن G جداء مباشر لـ N و Q.

14.5 (الزمر من الرتب pq، p، q أعداد أولية، $p < q$) لتكن الزمرة G، و لتكن P و Q p - زمر سيلو الجزئية و q - زمر سيلو الجزئية.. عندئذٍ $p = (G:Q)$ الذي يكون أصغر عدد أولي يقسم $(G:1)$، ومنه (انظر التمرين 4-4) فإن Q ناظمية. لأن P تطبيق تقابل على G/Q، ويكون لدينا

$$G = Q \times_q P,$$

وبقي أن نحدد تأثير P على Q بالترافق.

إن الزمرة $\operatorname{Aut}(Q)$ دائرية من الرتبة $q-1$ (انظر 3.4)، ومنه، باستثناء $p | q-1$، $G = Q \times P$.

إذا كان $p | q-1$، عندئذٍ فإن $\operatorname{Aut}(Q)$ (كونها دائرية) تحوي على زمرة جزئية وحيدة P' من الرتبة p. في الحقيقة تتألف P' من التطبيقات

$$x \mapsto x^i, \ \left\{ i \in \mathbf{Z}/q\mathbf{Z} \,\middle|\, i^p = 1 \right\}$$

لتكن a و b مولدات للزمرتين P و Q على الترتيب، وبفرض أن تــأثير a علــى Q بالترافق هو $x \mapsto x^{i_0}, i_0 \neq 1$ (في $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$). عندئذٍ فإن لــلزمرة G المولدات a و b والعلاقات

$$.a^p,\ b^q,\ aba^{-1} = b^{i_0}$$

باختيار i_0 مختلف يتوافق مع اختيار مولد مختلف a لــ P، وبالتالي يعطي زمرة متماثلة مع G.

والخلاصة: إذا كان p لا تقسم $q-1$، عندئذٍ فإن الزمرة الوحيدة من الرتبة pq هــي الزمرة الدائرية C_{pq}، إذا كان $p \mid q-1$، عندئذٍ توجد أيضاً زمرة غيــر تبديليـــة تعطــى بالمولدات والعلاقات كما سبق.

15.5 (الزمر من الرتبة 30) لتكن G زمرة من الرتبة 30. عندئذٍ

$s_3 = 1, 4, 7, 10, \ldots$ وتقسم 10،

$s_5 = 1, 6, 11, \ldots$ وتقسم 6.

وبالتالي $s_3 = 1$ أو 10، و $s_5 = 1$ أو 6. في الحقيقة، أحدها يساوي 1 على الأقل، ومن جهة أخرى نكون قد أوجدنا 20 عنصراً من الرتبة 3 و 24 عنصراً من الرتبة 5، والذي يكون مستحيلاً. لذلك، 3 − زمرة سيلو الجزئية P أو 5 − زمرة سيلو الجزئية Q تكون ناظمية، ومنه $H = PQ$ زمرة جزئية في G. لأن 3 لا يقسم $5-1=4$ ، تبين (5.14) بأن H تبديلية، $H \approx C_3 \times C_5$. وبالتالي

$$G = \left(C_3 \times C_5\right) \times_q C_2,$$

وبقي أن نحدد التشاكلات المحتملة $q : C_2 \to \operatorname{Aut}\left(C_3 \times C_5\right)$. لكــن التــشاكل q يكــون محدداً بصورة العنصر الذي لا يساوي المحايد في C_2، والذي يجب أن يكون عنصراً مــن الرتبة 2. لتكن a, b, c تولد C_3, C_5, C_2. عندئذٍ

$$\operatorname{Aut}\left(C_3 \times C_5\right) = \operatorname{Aut}\left(C_3\right) \times \operatorname{Aut}\left(C_5\right),$$

و عناصر $\operatorname{Aut}\left(C_3\right)$ و $\operatorname{Aut}\left(C_5\right)$ من الرتبة 2 هي فقط $a \mapsto a^{-1}$ و $b \mapsto b^{-1}$. لهذا يوجد بالضبط 4 تشاكلات q، و $q(c)$ هو أحد العناصر الآتية:

$$.\begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b \end{cases} \quad \begin{cases} a \mapsto a^{-1} \\ b \mapsto b^{-1} \end{cases}$$

و الزمر المقابلة لهذه التشاكلات لها مراكز من الرتبة 30، 3 (مولدة بــ a)، 5 (مولدة بـــ b)، و 1 على الترتيب، وبالتالي تكون غير متماثلة. علينا أن نبين بأنه (تحت سقف التماثل)

يوجد بالضبط 4 زمر من الرتبة 30. مثلاً، الزمرة الثالثة في قائمتنا لها المولدات a,b,c و العلاقات

$$a^3,\ b^5,\ c^2,\ ab=ba,\ cac^{-1}=a^{-1},\ cbc^{-1}=b$$

16.5 (الزمر من الرتبة 12) لتكن G زمرة من الرتبة 12، ولتكن P 3- زمرة سيلو الجزئية لها. إذا كانت P ناظمية، عندئذٍ لا تحوي P على زمرة جزئية ناظمية غير تافهة في G، ومنه التطبيق (4.2، التأثير على المرافقات اليسارية)

$$j:G\to \operatorname{Sym}(G/P)\approx S_4$$

متباين، وصورته عبارة عن زمرة جزئية من S_4 من الرتبة 12. من سيلو II نرى بأن G تحوي على 4 من 3- زمرة سيلو الجزئية، وبالتالي تحوي بالضبط على 8 عناصر من الرتبة 3. لكن جميع عناصر S_4 التي تكون من الرتبة 3 محتواة في A_4 (انظر إلى الجدول في 4.31)، ومنه فإن $j(G)$ تتقاطع مع A_4 بزمرة جزئية تحوي على الأقل على 8 عناصر. من مبرهنة لاغرانج نجد $j(G)=A_4$، ومنه $G\approx A_4$.

نفرض الآن بأن P ناظمية. عندئذٍ $G=P\times Q$ حيث Q 4- زمرة سيلو الجزئية. إذا كانت Q دائرية من الرتبة 4، عندئذٍ يوجد تطبيق وحيد غير تافه $Q(=C_4)\to \operatorname{Aut}(P)(=C_2)$، وبالتالي نحصل على زمرة غير تبديلية وحيدة $C_3\times C_4$. إذا كان $Q=C_2\times C_2$، يوجد تماماً 3 تشاكلات غير تافهة $q:Q\to \operatorname{Aut}(P)$، لكن ثلاثاً من الزمر الناتجة تكون متماثلة مع $S_3\times C_2$ بـ $C_2=\operatorname{Ker}q$. (التشاكلات تختلف بالتماثلات الذاتية لـ Q، وبالتالي يمكن أن نطبق أيضاً التمهيدية 17.3).

وبالتالي، توجد 3 زمر غير تبديلية من الرتبة 12 و زمرتان تبديليتان.

17.5 (الزمر من الرتبة p^3) لتكن G زمرة من الرتبة p^3، p عدد أولي فردي، ولنفرض بأن G غير تبديلية. نعلم من (17.4) بأن G تحوي على زمرة جزئية ناظمية N من الرتبة p^2.

إذا كان كل عنصر في G من الرتبة p (ما عدا 1)، عندئذٍ $N\approx C_p\times C_p$ و يوجد زمرة جزئية Q في G من الرتبة p بحيث يكون $Q\cap N=\{1\}$. بالتالي

$$G=N\times_q Q$$

بالنسبة لبعض التشاكلات $q:Q\to N$. إن رتبة $\operatorname{Aut}(N)\approx \operatorname{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ تساوي $(p^2-1)(p^2-p)$ (انظر 3.5)، وبالتالي فإن p - زمر سيلو الجزئية فيها من الرتبة

p . من مبرهنات سيلو، تكون مترافقة، ومن التمهيدية 18.3 نرى بأنه يوجد بالضبط زمـــرة غير تبديلية واحدة في هذه الحالة.

بفرض أن G تحوي على عنصر من الرتبة p^2، ولتكن N زمـــرة جزئيـــة مولـــدة بعنصر مثل a، لأن $(G:N)=p$ أصغر (والوحيد) عـــدد أولـــي يقـــسم $(G:1)$، N ناظمية في G (التمرين 4-4). نبين فيما بعد بأن G تحوي على عنصر من الرتبة p ولا ينتمي إلى N.

نعلم بأن $Z(G)\neq 1$، ولأن G غير تبديلية، $G/Z(G)$ ليست دائرية (4.19). لذلك $(Z(G):1)=p$ و $G/Z(G)\approx C_p\times C_p$. بـــشكل خـــاص، نـــرى بأنـــه لكـــل $x\in G, x^p\in Z(G)$. لأن $G/Z(G)$ تبديلية، يكون المبادل لأي زوج من عناصر G ينتمي إلى $Z(G)$، و بتطبيق الفرض الاستقرائي البسيط نرى بأن

$$(xy)^n=x^ny^n[y,x]^{\frac{n(n-1)}{2}}, n\geq 1$$

لذلك يكون $(xy)^p=x^py^p$، ومنه $x\mapsto x^p: G\to G$ تشاكل . صورته محتواة فـــي $Z(G)$، وبالتالي فإن نواته من الرتبة p^2 على الأقل. بمـــا أن N تحتـــوي فقـــط علـــى $p-1$ عنصر من الرتبة p، نرى بأنه يوجد عنصر b من الرتبة p خارج N. بالتـــالي $G=\langle a\rangle\times_q\langle b\rangle\approx C_{p^2}\times_q C_p$، وبقي أن نبرهن بملاحظة (3.18) بأن التـــشاكلات غيـــر التافهة $C_p\to Aut(C_{p^2})\approx C_p\times C_{p-1}$ تعطي زمراً متماثلة.

لهذا، تحت سقف التماثل، إن الزمر غير التبديلية الوحيدة من الرتبة p^3 هي تلك الزمـــر في (13.3, 14.3).

18.5 (الزمر من الرتب $2p^n$ ، $4p^n$، و $8p^n$، p فردي) لتكن G زمرة من الرتبـــة 2^mp^n ، $1\leq m\leq 3$، p عدد أولي فردي، $1\leq n$. سنرى بأن G ليست بـــسيطة. لـــتكن P p - زمرة سيلو الجزئية ولتكن $N=N_G(P)$، ومنه $s_p=(G:N)$.

من سيلو II، نرى بأن $s_p \mid 2^m, s_p=1, p+1, 2p+1, \ldots$. إذا كان $s_p=1$، تكـــون P ناظمية. إذا لم يكن كذلك، عندها توجد حالتان:

(i) $s_p=4$ و $p=3$ أو

(ii) $s_p=8$ و $p=7$.

في الحالة الأولى، التأثير بالترافق للزمرة G على مجموعة 3- زمر سيلو الجزئية[16] تعرف التشاكل $G \to S_4$، الذي ، إذا كانت G بسيطة، يجب أن يكون متبايناً. لذلك $(G:1) \mid 4!$، ومنه $n=1$، لدينا $(G:1)=2^m 3$. الآن إن دليل 2- زمر سيلو الجزئية يساوي 3، ومنه نحصل على التشاكل $G \to S_3$. نواته عبارة عن زمرة جزئية ناظمية غير تافهة في G.

في الحالة الثانية، النقاش نفسه يبين بأن $(G:1) \mid 8!$، وبالتالي $n=1$ أيضاً. لهذا $(G:1)=56$ و $s_7 = 8$. لذلك فإن G تحوي على 48 عنصراً من الرتبة 7، وبالتالي يمكن أن توجد 2- زمرة سيلو الجزئية واحدة فقط، والتي تكون ناظمية.

نلاحظ أن الزمر من الرتب pq^r، p، q عددان أوليان، $p<q$ ليست بسيطة، لأن التمرين 4-4 يبين بأن p - زمر سيلو الجزئية ناظمية. لتفحص هذه الحالات نبين بأن A_5 أصغر زمرة بسيطة غير دائرية.

19.5 (الزمر من الرتبة 60) لتكن G زمرة بسيطة من الرتبة 60. سنبين الآن بأن G متماثلة مع A_5.

نلاحظ بأن، ولأن G بسيطة، $s_2 = 3,5$ أو 15. إذا كانت P 2- زمرة سيلو الجزئية و $N = N_G(P)$، عندئذٍ $s_2 = (G:N)$.

الحالة $s_2 = 3$ تكون غير ممكنة، لأن نواة $G \to \mathrm{Sym}(G/N)$ ستكون زمرة جزئية غير تافهة في G.

في الحالة $s_2 = 5$، نحصل على تطبيق الاحتواء $G \to \mathrm{Sym}(G/N) = S_5$، حيث نعتبر G كزمرة جزئية دليلها 2 في S_5، لكن من (36.4) نرى بأن، لكل $n \geq 5$، A_n هي الزمرة الجزئية الوحيدة التي دليلها 2 في S_n.

في الحالة $s_2 = 15$، النقاش ذاته (باستخدام $s_2 = 6$) نرى بأنه توجد زمرتان من 2- زمرة سيلو الجزئية P و Q تتقاطعان بزمرة من الرتبة 2. إن المنظم N للزمرة $P \cap Q$ تحتوي على P و Q، وبالتالي فهو من الرتبة 12، 20، أو 60. في الحالة الأولى، النقاش السابق يبين بأن $G \approx A_5$، و الحالات المتبقية تناقض ببساطة لـ G.

تمارين

[16] بشكل مكافئ، التطبيق العادي $G \to \mathrm{Sym}(G/N)$.

1-5 بين أن كل زمرة منتهية (ليست بالضرورة أن تكون تبديلية) بـــ n عنصر على الأكثر ومن رتبة تقسم n لكل n يجب أن تكون دائرية.

الفصل السادس

المتسلسلات تحت الناظمية؛ الزمر القابلة للحل وعديمة القوى

Subnormal Series; Solvable and Nilpotent Groups

المتسلسلات تحت الناظمية (Subnormal Series)

لتكن G زمرة. تسمى المتسلسلة من الزمر الجزئية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset \ldots \supset G_n = \{1\}$$

متسلسلة تحت ناظمية (Subnormal Series) إذا كانت G_i ناظمية في G_{i-1} لكل i، وتسمى متسلسلة ناظمية (normal Series) إذا كانت G_i ناظمية في G لكل i[17]. يقال بأن المتسلسلة غير تكرارية (without repetition) إذا كانت كل الاحتواءات $G_{i-1} \supset G_i$ فعلية. (أي أن، $G_{i-1} \neq G_i$). عندئذٍ ندعو n طول المتسلسلة. ندعو زمر القسمة (quotient groups)أو (factor groups) G_{i-1}/G_i بزمر القسمة للمتسلسلة.

يقال عن المتسلسلة تحت الناظمية أنها متسلسلة تركيبية (composition Series) إذا لم تحو على متسلسلة مكررة والتي تكون بدورها متسلسلة تحت ناظمية أيضاً. وبكلمات أخرى، تكون متسلسلة تركيبية إذا كانت G_i أعظمية بين الزمر الجزئية الناظمية الفعلية G_{i-1} لكل i. لهذا تكون المتسلسلة تحت الناظمية متسلسلة تركيبية إذا وفقط إذا كانت كل زمرة قسمة لها بسيطة وغير تافهة. من الواضح ، أنه لكل زمرة جزئية منتهية في G توجد متسلسلة تركيبية (عادة كثير): نختار G_1 لتكون زمرة جزئية أعظمية فعلية في G، ومن ثم نختار G_2 لتكون زمرة جزئية أعظمية فعلية في G_1، الخ .. يمكن أن تكون زمرة غير منتهية أو لا يمكن أن تحوي على متسلسلة تركيبية منتهية.

نحصل من المتسلسلة تحت الناظمية

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_i > G_{i+1} > \ldots > G_n = \{1\}$$

على متتالية من المتتاليات التامة

---

[17] بعض المؤلفين يكتبون "متسلسلة ناظمية" حيث كتبنا "سلسلة تحت ناظمية" و "سلسلة لا متغيرة" حيث كتبنا "سلسلة ناظمية".

$$1 \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to G_{n-1}/G_{n-2} \to 1$$

$$1 \to G_{n-1} \to G_{n-2} \to G_{n-2}/G_{n-1} \to 1$$

$$...$$

$$1 \to G_1 \to G_0 \to G_0/G_1 \to 1$$

لذلك فإن G تبنى وحتى زمر القسمة $G_0/G_1, G_1/G_2, ..., G_{n-1}$ بتشكيل تمديـــدات بـــشكل متتالي. بشكل خاص،

بما أن لكل زمرة منتهية متسلسلة تركيبية، يمكن أن نعتبرها كأنها تبنى خارج زمر بـــسيطة. مبرهنة جوردان- هولدر، والتي هي الموضوع الرئيسي لهذه الفقرة، نقول بأن هـــذه الزمـــر البسيطة مستقلة عن المتسلسلة التركيبية (تحت سقف التماثل والرتبة).

نلاحـــــظ بأنـــــه إذا كـــــان للزمـــــرة G متسلـــــسلة تحـــــت ناظميـــــة $G = G_0 > G_1 > ... > G_n = \{1\}$، عندئذٍ

$$(G:1) = \prod_{1 \le i \le n} (G_{i-1} : G_i) = \prod_{1 \le i \le n} (G_{i-1}/G_i : 1)$$

مثال 1.6 (a) للزمرة التناظرية S_3 المتسلسلة التركيبية

$$S_3 > A_3 > 1$$

مع زمر القسمة C_2 و C_3.

(b) للزمرة التناظرية S_4 المتسلسلة التركيبية

$$S_4 > A_4 > V > \langle (13)(24) \rangle > 1,$$

حيث $V \approx C_2 \times C_2$ وتتألف من كل العناصر من الرتبة 2 في A_4 (انظر 31.4). وزمـــر القسمة هي C_2, C_3, C_2, C_2.

(c) أي معلم تام في F_n^p، p عدد أولي، هو متسلسلة تركيبية. طولها n، وزمر القسمة لها هي $C_p, C_p, ..., C_p$.

(d) نأخذ الزمرة الدائرية $C_m = \langle a \rangle$. من أجل أي تحليل $m = p_1 ... p_r$ لـــ m إلـــى جداء أعداد أولية (ليس من الضروري أن تكون مختلفة)، توجد المتسلسلة التركيبية

$$\begin{array}{ccccccc} C_m & > & C_{\frac{m}{p_1}} & > & C_{\frac{m}{p_1 p_2}} & > & ... \\ \| & & \| & & \| & & \\ \langle a \rangle & & \langle a^{p_1} \rangle & & \langle a^{p_1 p_2} \rangle & & \end{array}$$

الطول يساوي r، وزمر القسمة هي $C_{p_1}, C_{p_2}, ..., C_{p_r}$.

(e) بفرض أن G جداء مباشر لزمر بسيطة، $G = H_1 \times ... \times H_r$. عندئذٍ يكون للزمرة G المتسلسلة التركيبية

$$G > H_2 \times ... \times H_r > H_3 \times ... \times H_r > ...$$

من الطول r مع زمر القسمة $H_1, H_2, ..., H_r$. نلاحظ بأنه لأي تبديلة p للمجموعة $\{1, 2, ..., r\}$، توجد متسلسلة تركيبية أخرى مع زمر القسمة $H_{p(1)}, H_{p(2)}, ..., H_{p(r)}$.

(f) لقد رأينا في (36.4) بأنه لأجل $n \geq 5$، إن الزمر الجزئية الناظمية في S_n هي S_n و A_n و $\{1\}$، وفي (32.4) أن A_n بسيطة. وبالتالي $S_n > A_n > \{1\}$ هي المتسلسلة التركيبية الوحيدة لـ S_n.

مبرهنة (2.6) (جوردان - هولدر) (Jordan - Holder) لتكن G زمرة منتهية. إذا كانت

$$G = G_0 > G_1 > ... > G_s = \{1\}$$

$$G = H_0 > H_2 > ... > H_t = \{1\}$$

سلسلتين تركيبيتين للزمرة G، عندئذٍ $s = t$ و يوجد تبديلة p للمجموعة $\{1, 2, ..., r\}$، بحيث يكون $G_i / G_{i+1} \approx H_{p(i)} / H_{p(i)+1}$.[18]

البرهان. نستخدم الاستقراء على رتبة G.

الحالة I: $H_1 = G_1$. في هذه الحالة، لدينا سلسلتان تركيبيتان للزمرة G_1، والتي يمكن أن نطبق عليها الفرض الاستقرائي.

الحالة II: $H_1 \neq G_1$. بما أن G_1 و H_1 زمرتان جزئيتان ناظميتان في G، فإن G_1H_1 زمرة جزئية ناظمية في G. و بشكل خاص تحوي كل من G_1 و H_1، اللتين تكونان أعظميتين في G، و منه $G_1H_1 = G$. لذلك

$$G/G_1 = G_1H_1/G_1 \quad H_1/G_1 \cap H_1 \qquad \text{(انظر 1.45).}$$

بشكل مشابه $G_1/G_1 \cap H_1 \quad G/H_1$. لتكن $K_2 = G_1 \cap H_1$، عندئذٍ K_2 زمرة جزئية ناظمية أعظمية في كل من G_1 و H_1، و

$$G/G_1 \quad H_1/K_2,\ G/H_1 \quad G_1/K_2 \qquad (19)$$

نختار المتسلسلة التركيبية

$$K_2 > K_3 > ... > K_u$$

يكون لدينا الشكل

[18] بيّن جوردان بأن زمر القسمة المتقابلة لها نفس الرتبة، وبيّن هولدر بأنها متماثلة.

$$\begin{array}{ccccccc} & G_1 & > & G_2 & > & \dots & > & G_s \\ & \diagup & & \diagdown & & & & \\ G & & & K_2 & > & \dots & > & K_u \\ & \diagdown & & \diagup & & & & \\ & H_1 & > & H_2 & > & \dots & > & H_t \end{array}$$

بتطبيق الفرض الاستقرائي على G_1 و H_1 و على متسلسلاتها التركيبية في المخطط، نجد

(التعريف) $\{G/G_1, G_1/G_2, G_2/G_3, \quad \dots\} = (G > G_1 > G_2 > \dots)$ زمر القسمة

(الاستقراء) $\{G/G_1, G_1/K_2, K_2/K_3, \ \dots\}$

(بتطبيق(19)) $\{H_1/K_2, G/H_1, K_2/K_3, \dots\}$

(من الرتبة) $\{G/H_1, H_1/K_2, K_2/K_3, \dots\}$

(الاستقراء) $\{G/H_1, H_1/H_2, H_2/H_3, \dots\}$

(التعريف) $(G > H_1 > H_2 > \dots)$زمر القسمة $=$

نلاحظ بأنه إذا طبقت هذه المبرهنة على الزمرة الدائرية C_m ينتج بأن تحليل العدد الصحيح إلى جداء أعداد أولية يكون وحيداً.

ملاحظة 3.6 توجد زمر غير منتهية تكون متسلسلاتها التركيبية منتهية (حتى أنه يوجد زمر بسيطة غير منتهية). لمثل هذه الزمرة، لتكن $d(G)$ أصغر طول للمتسلسلات التركيبية. عندئذٍ ولأن مبرهنة جوردان – هولدر تتوسع لتبين بأن كل المتسلسلات التركيبية لها الطول $d(G)$ وتحوي على زمر قسمة متماثلة.

يصلح البرهان نفسه عدا أنه عليك استخدام الاستقراء على $d(G)$ بدلاً من $|G|$ وبرهان بأنها زمرة جزئية من زمرة مع متسلسلة تركيبية منتهية ولها أيضاً متسلسلة تركيبية منتهية (التمرين 6-1).

تسمى أحياناً زمر القسمة للمتسلسلات التركيبية بالعوامل التركيبية (composition factor).

الزمر القابلة للحل (Solvable groups)

إن المتسلسلات تحت الناظمية والتي تكون فيها زمر القسمة تبديلية تسمى بالمتسلسلات القابلة للحل (solvable series). وتكون الزمرة قابلة للحل (solvable) أو (soluble) إذا حوت على متسلسلة قابلة للحل. وبشكل آخر، يمكن أن نقول بأن الزمرة قابلة للحل إذا أمكن الحصول عليها بتشكيل تمديدات متتالية لزمر تبديلية. وبما أن: تكون الزمرة التبديلية بسيطة إذا وفقط إذا كانت دائرية رتبتها عدد أولي، نرى بأنه تكون الزمرة G قابلة للحل إذا وفقط

إذا كان لإحداها (وبالتالي لكل واحدة) متسلسلة تركيبية وكل زمر القسمة فيها هي زمر دائرية رتبتها عدد أولي.

كل زمرة تبديلية تكون قابلة للحل، كذلك كل زمرة ديهيدرال. ولقد بينت النتائج في الفصل الخامس أن كل زمرة من رتبة < 60 تكون قابلة للحل. وبالعكس، زمرة غير تبديلية بسيطة، مثلاً، إن A_n لكل $n \geq 5$، لن تكون زمرة قابلة للحل.

مبرهنة 4.6 (فيت - طمبسون) (Feit – Thompson) كل زمرة منتهية رتبتها عدد فــردي تكون قابلة للحل[19] .

البرهان. يشغل البرهان الإصدارات الكاملة لمجلة Pacific للرياضيات (فيت – طومبــسون 1963).

بكلمات أخرى، كل زمرة بسيطة غير تبديلية منتهية تكون من رتبة زوجية، ولذلك فهي تحوي على عنصر من الرتبة 2. إن هذه المبرهنة تلعب دوراً في تصنيف الزمــر البــسيطة المنتهية، انظر p49.

مثال 5.6 نأخذ الزمر الجزئية $B = \left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$ و $U = \left\{\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ من الزمرة $GL_2(F)$، لحقــل مــا. عندئــذ تكــون U زمــرة جزئيــة ناظميــة فــي B، و $(F,+)$ U ،$F^\times \times F^\times$ B/U. وبالتالي فإن B قابلة للحل.

قضية 6.6 (a) كل زمرة جزئية من زمرة قسمة لزمرة قابلة للحل هي زمرة قابلة للحل.

(b) إن تمديد الزمر القابلة للحل هو زمرة قابلة للحل.

---

[19] كتب برنسايد (1897, p379):

لا توجد زمر بسيطة رتبتها عدد فردي تكون في الوقت الحاضر معروفة حتى تتواجد. و التحــري لوجود أو عدم وجود

مثل هذه الزمر سيقودنا بشكل أكيد، مهما تكن الاحتواءات، إلى نتائج في غاية من الأهمية، يمكن أن ننصح القارئ بأنه

يستحق تركيز انتباهه. أيضاً، لا توجد زمر بسيطة معلومة بحيث تحوي رتبها على أقل مــن ثــلاث أعداد أولية مختلفة. ...

تطور هام في المسألة الأولى لم تحل إلا في المرجع Suzuki,M. عدم وجود نمط معين لزمرة بسيطة من رتبة منتهية، 1957. على أي حال، حلت المسألة الثانية من قبل برنسايد نفسه، الذي برهن باستخدام المميزات أن أي زمرة تحوي رتبها على أقل من ثلاث أعداد أولية مختلفة هي زمر قابلة للحل (انظر ألبيرن وبيل 1955,p182).

البرهان. (a) لتكن $G > G_1 > ... > G_n$ متسلسلة قابلة للحل للزمرة G، ولتكن H زمرة جزئية من G. إن التشاكل

$$x \mapsto xG_{i+1} : H \cap G_i \to G_i / G_{i+1}$$

نواته $(H \cap G_i) \cap G_{i+1} = H \cap G_{i+1}$، لذلك $H \cap G_{i+1}$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap G_i$ و زمر القسمة $H \cap G_i / H \cap G_{i+1}$ تشكل تطبيقاً متبايناً إلى G_i / G_{i+1}، التي تكون تبديلية. نكون قد بينا بأن

$$H > H \cap G_1 > ... > H \cap G_n$$

متسلسلة قابلة للحل للزمرة H.

لتكن $\bar{G}$ زمرة القسمة للزمرة G، وليكن $\bar{G}_i$ صورة G_i في $\bar{G}$. عندئذٍ

$$\bar{G} > \bar{G}_1 > ... > \bar{G}_n = \{1\}$$

متسلسلة قابلة للحل في $\bar{G}$.

(b) لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، ولتكن $\bar{G} = G/N$. علينا أن نبين بأنه إذا كانت N و $\bar{G}$ قابلتين للحل، فإن G أيضاً زمرة قابلة للحل. لتكن

$$\bar{G} > \bar{G}_1 > ... > \bar{G}_n = \{1\}$$

$$N > N_1 > ... > N_m = \{1\}$$

متسلسلتين قابلتين للحل لـــ $\bar{G}$ و N، و لتكن G_i الصورة العكسية لـــ $\bar{G}_i$ في G. عندئذٍ $\bar{G}_i / \bar{G}_{i+1} \quad G/G_{i+1}$ (انظر 47.1)، و لذلك

$$G > G_1 > ... > G_n = (N) > N_1 > ... > N_m$$

هي متسلسلة قابلة للحل في G.

نتيجة 7.6 كل p - زمرة منتهية تكون قابلة للحل.

البرهان. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة G. بالعودة إلى (4.16)، يكون المركز $Z(G)$ للزمرة G غير تافه، ومن الفرض الاستقرائي ينتج بأن $G/Z(G)$ قابلة للحل. لأن $Z(G)$ تبديلية، ويبين (b) في القضية بأن G قابلة للحل.

لتكن G زمرة. نتذكر بأن مبادل العنصرين $x, y \in G$ هو

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} = xy(yx)^{-1}$$

لذلك

$$[x, y] = 1 \Leftrightarrow xy = yx,$$

وتكون G تبديلية إذا وفقط إذا كان كل مبادل يساوي 1.

مثال 8.6 لأي فضاء متجهي ذو بعد منته V على الحقل K و أي معلم تام $F=\{V_n,V_{n-1},\dots\}$ في V، تكون الزمرة

$$B(F)=\left\{a\in \mathrm{Aut}(V)\,\middle|\, a(V_j)\subset V_j\,,\forall j\right\}$$

قابلة للحل.

لتكن $U(F)$ الزمرة المعرفة في المثال 5.10. عندئذٍ $B(F)/U(F)$ تبديلية، و، عندما $K=\mathbb{F}_p$، $U(F)$ تكون p - زمرة. هذا يبرهن بأن $B(F)$ قابلة للحل في حالة $K=\mathbb{F}_p$، وفي الحالة العامة تعرف واحدة منها الزمر الجزئية $\dots\supset B_1\supset B_0$ في $B(F)$ مع

$$B_i=\left\{a\in B(F)\,\middle|\middle|\, a(V_j)\subset V_{j-i}\,,\forall j\right\}$$

و نلاحظ بأن مبادل عنصرين في B_i يقع في B_{i+1}.

لأي تشاكل $j:G\to H$

$$j([x,y])=j(xyx^{-1}y^{-1})=[j(x),j(y)],$$

أي أن، j ينقل مبادل العنصرين x,y إلى مبادل العنصرين $j(x),j(y)$. بشكل خاص، نرى بأن H تبديلية، عندئذٍ فإن j ينقل كل المبادلات في G إلى 1.

إن الزمرة $G'=G^{(1)}$ المولدة بالمبادلات في G تسمى الزمرة المبادلة (commutator) أو الزمرة الجزئية المشتقة من الدرجة الأولى (first derived subgroup) في G.

قضية 9.6 الزمرة الجزئية المبادلة G' هي زمرة جزئية مميزة في G، وهي أصغر زمرة ناظمية في G بحيث تكون G/G' تبديلية.

البرهان. التماثل الذاتي للزمرة G ينقل المجموعة المولدة لـ G' إلى G'، و بالتالي تنتقل G' إلى G'. وبما أن هذا صحيح لكل التماثلات الذاتية لـ G، فإن G' زمرة مميزة.

نكتب $g\mapsto \bar{g}$ للتشاكل $g\mapsto gG':G\to G/G'$. عندئذٍ $[\bar{g},\bar{h}]=\overline{[g,h]}$، الذي يساوي 1 لأن $[g,h]\in G'$. وبالتالي $[\bar{g},\bar{h}]=1$ لكل $\bar{g},\bar{h}\in G/G'$، الذي يبين بأن G/G' تبديلية.

لتكن N الزمرة الجزئية الناظمية الثانية في الزمرة G بحيث تكون G/N تبديلية، ومنه $[g,h]\in N$. بما أن هذه العناصر تولد G'، $N\supset G'$.

لكل $n \geq 5$، A_n هي أصغر زمرة جزئية ناظمية في S_n تعطي زمرة قسمة تبديليـــة. بالتالي $(S_n)' = A_n$.

الزمرة الجزئية المشتقة من الدرجة الثانية (second derived subgroup) للزمـــرة G هي $(G')'$، والثالثة (third) هي $G^{(3)} = (G'')'$، وهكذا. بما أن الزمرة الجزئية المميـــزة لزمرة جزئية مميزة تكون مميزة (6.3a)، تكون كل زمرة جزئية مشتقة زمرة مميـــزة فـــي G. وبالتالي نحصل على المتسلسلة الناظمية

$$G \supset G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \ldots$$

و التي تدعى بالمتسلسلة المشتقة (derived series) في G. مثلاً، عنـــدما $n \geq 5$، تكـــون المتسلسلة المشتقة للزمرة S_n

$$S_n \supset A_n \supset A_n \supset A_n \supset \ldots$$

قضية 10.6 تكون الزمرة G قابلة للحل إذا وفقط إذا كانت الزمرة الجزئية المـــشتقة $G^{(k)}$ تساوي 1 لبعض الأعداد k.

البرهان. إذا كان $G^{(k)} = 1$، عندئذٍ فإن المتسلسلة المشتقة هي متسلسلة قابلة للحل للزمـــرة G. وبالعكس، لتكن

$$G = G > G > G > \ldots > G_s = 1$$

متسلسلة قابلة للحل للزمرة G. بما أن G/G_1 تبديلية، $G_1 \supset G'$. الآن إن $G'G_2$ زمرة جزئية في G_1، ومن

$$G'/G' \cap G_2 \longrightarrow G'G_2/G_2 \subset G_1/G_2$$

نرى بأن

$$G_1/G_2 \text{ تبديلية } \Leftarrow G'/G' \cap G_2 \text{ تبديلية } \Leftarrow G'' \subset G' \cap G_2 \subset G_2.$$

بالمتابعة بهذه الطريقة، نجد بأن $G^{(i)} \subset G_i$ لكل i، وبالتالي $G^{(s)} = 1$.

لهذا، فإن الزمرة G القابلة للحل تحوي على متسلسلة قابلـــة للحـــل قانونيـــة، بالتحديـــد المتسلسلة المشتقة، والتي فيها كل الزمر ناظمية في G. إن برهـــان القـــضية يبـــين بـــأن المتسلسلة المشتقة هي أقصر متسلسلة قابلة للحل للزمرة G. يسمى طولها بـــالطول القابـــل للحل للزمرة G.

الزمر عديمة القوى (Nilpotent groups)

لتكن G زمرة. نتذكر بأن $Z(G)$ هي مركز الزمرة G. لــتكن $Z^2(G)\subset G$ زمــرة جزئية في G المقابل لــ $Z(G/Z(G))\subset G/Z(G)$. لهذا

$$g\in Z^2(G)\Leftrightarrow [g,x]\in Z(G) \text{ لكل } x\in G$$

بالمتابعة بهذه الطريقة، نحصل على متتالية من الزمر الجزئية (متسلسلة مركزيــة متزايــدة) (ascending central series)

$$\{1\}\subset Z(G)\subset Z^2(G)\subset ...$$

حيث

$$g\in Z^i(G)\Leftrightarrow [g,x]\in Z^{i-1}(G) \text{ لكل } x\in G.$$

إذا كان $Z^m(G)=G$ لبعض m، عندئذٍ يقال بــأن G عديمــة القــوى (nilpotent)، ويسمى أصغر عدد مثل m صف (الانعدام) (nilpotency) للزمرة G. مــثلاً، كــل p - زمرة منتهية تكون عديمة القوى (بتطبيق 16.4).

$\{1\}$ هي الزمرة الوحيدة التي لها الصف 0، و الزمر التي من الــصف 1 هــي الزمــر التبديلية تماماً. تكون الزمرة من الرتبة 2 إذا وفقط إذا كانت $G/Z(G)$ تبديلية- كما يقــال بأن الزمرة فوق آبلية (metabelian).

مثال 11.6 (a) من الواضح أن الزمرة عديمة القوى هي زمرة قابلة للحل، لكن العكس ليس صحيحاً. مثلاً، من أجل الحقل F، ليكن

$$B=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \middle| a,b,c\in F,\ ac\neq 0\right\}$$

عندئذٍ $Z(B)=\{aI\mid a\neq 0\}$، و يكون مركز $B/Z(B)$ تافهاً. لذلك $B/Z(B)$ليست عديمة القوى، لكن نقول في (5.6) أنها قابلة للحل.

(b) الزمرة $G=\begin{pmatrix} 1 & * & *\\ 0 & 1 & *\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ فوق آبلية: مركزها $\begin{pmatrix} 1 & 0 & *\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$، و $G/Z(G)$ تبديلية.

(c) أي زمرة غير آبليــة G مــن الرتبــة p^3 تكــون فــوق آبليــة. فــي الحقيقــة، $G'=Z(G)$ من الرتبة p (انظر 17.5)، و G/G' تبديلية (18.4). بشكل خاص، زمر ديهيدرال وزمر القسمة من الرتبة 8، Q و D_4، فوق آبلية. زمرة ديهيدرال D_{2^n} عديمــة القوى من الصف n - يمكن أن يبرهن هذا بالاستقراء، باستخدام أن $Z(D_{2^n})$ من الرتبة 2، و $D_{2^n}/Z(D_{2^n})\approx D_{2^{n-1}}$. إذا لم يكن n قوى للعدد 2، عندئذٍ D_n ليست عديمــة القوى (باستخدام المبرهنة 17.6 القادمة).

قضية 12.6 (a) الزمرة الجزئية من زمرة عديمة القوى هي زمرة عديمة القوى.

(b) زمرة القسمة لزمرة عديمة القوى هي زمرة عديمة القوى.

البرهان. (a) لتكن H زمرة جزئية من الزمرة عديمة القوى G. من الواضح أن، $Z(H) \supset Z(G) \cap H$. بفرض (بالاستقراء) أن $Z^i(H) \supset Z^i(G) \cap H$، عندئذٍ $Z^{i+1}(H) \supset Z^{i+1}(G) \cap H$، لأن (لكل $h \in H$)

$$h \in Z^{i+1}(G) \Rightarrow [h,x] \in Z^i(G), x \in G \Rightarrow [h,x] \in Z^i(H), x \in H.$$

(b) بشكل مباشر.

ملاحظة 13.6 علينا أن نلاحظ بأن H زمرة جزئية في G، عندئذٍ من الممكن أن يكون $Z(H)$ أكبر من $Z(G)$. مثلاً، إن مركز

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid ab \neq 0 \right\} \subset GL_2(F)$$

هي H نفسها، لكن مركز $GL_2(F)$ يحوي فقط على المصفوفة السلمية.

قضية 14.6 تكون الزمرة G عديمة القوى من الصف $\leq m$ إذا وفقط إذا كان

$$[\ldots[[g_1, g_2], g_3], \ldots, g_{m+1}] = 1$$

لكل $g_1, g_2, \ldots, g_{m+1} \in G$.

البرهان. نتذكر بأن، $g \in Z^i(G) \Leftrightarrow [g,x] \in Z^{i-1}(G)$ لكل $x \in G$.

بفرض أن G عديمة القوى من الصف $\leq m$، عندئذٍ

$$G = Z^m(G) \Rightarrow [g_1, g_2] \in Z^{m-1}(G), g_1, g_2 \in G$$

$$\Rightarrow [[g_1, g_2], g_3] \in Z^{m-2}(G), g_1, g_2, g_3 \in G$$

......

$$\Rightarrow [\ldots[[g_1, g_2], g_3], \ldots, g_m] \in Z(G), g_1, \ldots, g_m \in G$$

$$\Rightarrow [\ldots[[g_1, g_2], g_3], \ldots, g_{m+1}] = 1, g_1, \ldots, g_m \in G$$

من أجل العكس، ليكن $g_1 \in G$. عندئذٍ

$$\left[\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_m\right],g_{m+1}\right]=1, g_1,g_2,\ldots,g_{m+1}\in G$$

$$\Rightarrow\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_m\right]\in Z(G), g_1,\ldots,g_m\in G$$

$$\Rightarrow\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_{m-1}\right]\in Z^2(G), g_1,\ldots,g_{m-1}\in G$$

......

$$\Rightarrow g_1\in Z^m(G), g_1\in G$$

ليس بالضرورة أن يكون التمديد لزمر عديمة القوى تمديداً عديم القوى، أي أن،

N و G/N عديم القوى $\not\Rightarrow$ G عديمة القوى. (20)

مثلاً، الزمرة الجزئية U في الزمرة B في الأمثلة 5.6 و 11.6 تبديلية و B/U تبديلية، لكن B ليست عديمة القوى.

على أي حال، الاقتضاء (20) محقق عندما تكون N محتواة في مركز الزمرة G. في الحقيقة، لدينا النتيجة الأكثر تفصيلاً الآتية.

نتيجة 15.6 لكل زمرة جزئية N من مركز الزمرة G،

G عديمة القوى من الصف $\leq m+1$ $\Rightarrow$ G/N عديمة القوى من الصف m.

البرهان. نكتب p للتطبيق $G\to G/N$. عندئذٍ

$$p\left(\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_m\right],g_{m+1}\right]\right)=$$

$$\left[\ldots\left[\left[p\,g_1,p\,g_2\right],p\,g_3\right],\ldots,p\,g_m\right],p\,g_{m+1}\right]=1,$$

$g_1,g_2,\ldots,g_{m+1}\in G$. بالتـــالي $\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_m\right],g_{m+1}\right]\in N\subset Z(G)$، ومنه $\left[\ldots\left[\left[g_1,g_2\right],g_3\right],\ldots,g_{m+1}\right],g_{m+2}\right]=1$ لكل $g_1,\ldots,g_{m+2}\in G$.

نتيجة 16.6 كل p - زمرة منتهية تكون عديمة القوى.

البرهان. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة G. لأن $Z(G)\neq 1$، $G/Z(G)$ عديمـــة القوى، والتي تقتضي بأن G عديمة القوى.

نتذكر بأن التمديد

$$1\to N\xrightarrow{i}G\xrightarrow{p}Q\to 1$$

يكون مركزياً إذا كان $i(N)\subset Z(G)$. عندئذٍ:

إن الزمر عديمة القوى هي تلك الزمر التي يمكن الحصول عليها بتمديـــدات مركزيـــة متتالية.

بالمقابل:

إن الزمر القابلة للحل هي تلك الزمر التي يمكن الحصول عليهـــا مـــن زمـــر تبديليـــة بتمديدات متتالية

(ليس بالضرورة أن تكون مركزية).

مبرهنة 17.6 تكون الزمرة المنتهية عديمة القوى إذا وفقط إذا كانت تساوي الجداء المباشـــر لزمر سيلو الجزئية فيها.

البرهان. من الواضح أن الجداء المباشر لزمر عديمة القوى هو زمرة عديمة القوى، ولـــذلك فإن الاتجاه الأول يأتي من النتيجة السابقة. العكس، لتكن G زمرة منتهية عديمـــة القـــوى. بالعودة إلى (9.5) يكفي أن نبرهن بأن كل زمر سيلو الجزئية ناظمية. لتكن P زمرة جزئية ما من G، و لتكن $N=N_G(P)$. تبين التمهيدية الآتية بـــأن $N_G(N)=N$، وتبـــين الثانية بأن $N=G$، أي أن، P ناظمية في G.

تمهيدية 18.6 لتكن P p - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة المنتهية G. لأي زمرة جزئية H في G تحتوي على $N_G(P)$، يكون لدينا $N_G(H)=H$.

البرهان. لتكن $g\in N_G(H)$، ومنه $gHg^{-1}=H$. عندئذٍ $H\supset gPg^{-1}=P'$، والتي هي عبارة عن p - زمرة سيلو الجزئية في الزمـــرة H. مـــن ســـيلو II، $hP'h^{-1}=P$ لـــبعض $h\in H$، ومنـــه $hgPg^{-1}h^{-1}\subset P$. بالتـــالي $hg\in N_G(P)\subset H$، ومنـــه $g\in H$.

تمهيدية 19.6 لتكن H زمرة جزئية فعلية من زمرة منتهيـــة عديمـــة القـــوى G، عندئـــذٍ $H\neq N_G(H)$.

البرهان. إن الحالة تكون بشكل واضح صحيحة بالنسبة للزمر التبديليـــة، ولـــذلك يمكـــن أن نفرض بأن G غير تبديلية. نستخدم الاستقراء على رتبة الزمرة G. لأن G عديمة القوى، $Z(G)\neq 1$. إن عناصر الزمـــرة $Z(G)$ تـــنظم H بـــشكل معـــين، ومنـــه إذا كـــان $H\not\supseteq Z(G)$، يكون لدينا $H\subsetneq Z(G).H\subset N_G(H)$. لهذا يمكن أن نفـــرض بـــأن $Z(G)\subset H$. عندئذٍ فإن منظم الزمرة H في G يتطابق بالنـــسبة (46.1) مـــع مـــنظم $H/Z(G)$ في $G/Z(G)$، و يمكننا أن نطبق الفروض الاستقرائية.

ملاحظة 20.6 من أجل الزمرة التبديلية المنتهية G نستنتج الحقيقة بأن G جداء مباشر لـــ p - زمر جزئية أولية فيها.

قضية 21.6 (مناقشة فراتيني) لتكن H زمرة جزئية ناظمية من زمرة منتهية G، ولــتكن p - زمرة سيلو الجزئية P في الزمرة H. عندئذٍ $G = H.N_G(P)$.

البرهان. لتكن $g \in G$. عندئذٍ $gPg^{-1} \subset gHg^{-1} = H$، و كل من gPg^{-1} و P عبارة عن p - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة H. بالعودة إلى سيلو II ، يوجد $h \in H$ بحيــث يكون $gPg^{-1} = hPh^{-1}$، وبالتالي $h^{-1}g \in N_G(P)$ ومنه $g \in H.N_G(P)$.

مبرهنة 22.6 تكون الزمرة عديمة القوى إذا وفقط إذا كانت كل زمرة جزئية أعظمية فعليــة ناظمية.

البرهان. قلنا في التمهيدية 6.19 بأن لأي زمرة جزئية فعلية H من زمرة عديمـــة القــوى G، $H \subsetneqq N_G(H)$. بالتالي،

$$H \text{ أعظمية } \Leftarrow N_G(H) = G$$

أي أن، H ناظمية في G.

العكس، بفرض أن كل زمرة جزئية أعظمية فعلية في G تكون ناظمية. ســنتحقق مــن شروط المبرهنة 17.6. لهذا، لتكن P عبارة عن p - زمرة سيلو الجزئية في الزمرة G. إذا لم تكن P ناظمية في G، عندئذٍ توجد زمرة جزئية أعظمية فعلية H في G تحــوي $N_G(P)$. وكونها أعظميـــة، فـــإن H ناظميـــة، ومنـــه تبـــين مناقـــشة فراتينـــي بـــأن $G = H.N_G(P) = H$ - وهذا تناقض.

الزمر بمؤثرات (Groups with operators)

نتذكر بأن مجموعة التماثلات الذاتية $\mathrm{Aut}(G)$ للزمرة G هي أيــضاً زمـــرة. لــتكن A زمرة. يدعى الزوج (G, j) المؤلف من الزمرة G مع التــشاكل $j : A \to \mathrm{Aut}(G)$ بـــ A - زمرة، أو يقال بأن الزمرة G مع A كزمرة مـــن المـــؤثرات (Groups with operators)

لتكن G هي A - زمرة، ولنكتب $^a x$ للحد $j(a)x$ عندئذٍ

(a) $^{(ab)}x = {}^a({}^b x)$ (j تشاكل)

(b) $^a(xy) = {}^a(x)\,{}^a(y)$ ($j(a)$ تشاكل)

(c) $^1 x = x$ (j تشاكل)

بالعكس، إن التطبيق $(a,x)\mapsto {}^a x : A\times G\to G$ يحقق (a) ، (b) ، (c) وينتج من التشاكل $A\to \mathrm{Aut}(G)$. يبين الشرطان (a) و (c) أن $x\mapsto {}^a x$ هو التطبيق العكسي لـ $x\mapsto {}^{(a^{-1})}x$ ، وبالتالي يكون $x\mapsto {}^a x$ تقابلاً $G\to G$. عندئذٍ يبين الشرط (b) بأنه تماثل ذاتي على G. أخيراً، يبين (a) بأن التطبيق $\varphi(a)=x\mapsto {}^a x$ تشاكل $A\to \mathrm{Aut}(G)$.

لتكن G زمرة مع المؤثرات المعرفة A. تكون الزمرة الجزئية H من الزمرة G ثابتة (admissible) أو لا متغيرة (invariant) إذا كان

$$x\in H \Rightarrow {}^a x\in H,\, a\in A$$

إن تقاطع الزمر الثابتة هو زمرة ثابتة. إذا كانت H ثابتة، فإن كل من منظمها و ممركزها زمرة ثابتة أيضاً.

A - تشاكل (أو تشاكل ثابت) (admissible homomorphism) لـ A - زمر هو تشاكل $\gamma : G\to G'$ بحيث يكون $\gamma({}^a g)={}^a\gamma(g)$ لكل $a\in A, g\in G$.

مثـال 23.6 (a) يمكن أن نعتبر زمرة G كزمرة مع $\{1\}$ كزمرة للمؤثرات. في هذه الحالة تكون كل الزمر الجزئية و التشاكلات ثابتة، ومنه فإن نظرية الزمر مع المؤثرات تحوي نظرية الزمر بدون مؤثرات.

(b) نعتبر G زمرة التأثير على نفسها بالترافق، أي ، باعتبار G مع التشاكل

$$g\mapsto i_g : G\to \mathrm{Aut}(G)$$

في هذه الحالة، الزمر الجزئية الثابتة هي الزمر الجزئية الناظمية.

(c) نعتبر G مع $A=\mathrm{Aut}(G)$ كزمرة من للمؤثرات. في هذه الحالة، الزمر الجزئية الثابتة هي الزمر الجزئية المميزة.

لقد برهن كل شيء تقريباً بالنسبة للزمر وتحقق أيضاً بالنسبة للزمر مع المؤثرات. بحالة خاصة، إن المبرهنات 44.1، 45.1 و 46.1 تتحقق بالنسبة للزمر بمؤثرات. في كل حالة، يكون البرهان نفسه كما سبق غير أنه يجب التأكد من قابلية الثبات.

مبرهنة 24.6 لأي تشاكل ثابت $\gamma : G\to G'$ من A - زمر، $N \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}(\gamma)$ زمرة جزئية ناظمية ثابتة في G، $\gamma(G)$ زمرة جزئية ثابتة في G'، ويتحلل γ بطريقة طبيعية إلى تركيب من تطبيق غامر ثابت، تماثل ثابت، و تطبيق متباين ثابت:

$$G\to G/N \xrightarrow{\quad} \gamma(G)\to G'$$

مبرهنة 25.6 لتكن G زمرة بمؤثرات A، و لتكن H و N زمرتين جزئيتين ثـــابتتين، حيث N ناظمية. عندئذٍ $H \cap N$ زمرة جزئية ثابتة ناظمية في H، HN زمرة جزئيـــة ثابتة في G، و $hH \mapsto h(H \cap N)$ تماثل ثابت $H/H \cap N \to HN/N$.

مبرهنة 26.6 ليكن $\varphi : G \to G'$ تشاكلاً ثابتاً غامراً من A - زمر. بالنسبة للتطبيق التقابل $H \leftrightarrow \bar{H}$ بين مجموعة الزمر الجزئية في G الحاوية على $\operatorname{Ker}(\varphi)$ و مجموعة الزمر الجزئية في $\bar{G}$ (انظر 64.1)، الزمر الجزئية الثابتة تقابل الزمر الجزئية الثابتة.

ليكن $\varphi : A \to \operatorname{Aut}(G)$ زمرة بالمؤثر A. إن المتسلـــسلة تحـــت الناظميـــة الثابتـــة (admissible subnormal series) هي متسلسلة من الزمر الجزئية الثابتة في G

$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_r$$

حيث كل G_i ناظمية في G_{i-1}. نعرف بشكل مشابه المتسلسلة التركيبية الثابتة. تكون زمـــر القسمة في المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة A - زمراً، وزمر القسمة في المتسلسلة التركيبيـــة الثابتة A - زمراً بسيطة، أي أنه، لا يوجد زمر جزئية ثابتة ناظمية غير الزمرتين التافهتين.

إن مبرهنة جوردان – هولدر مستمر لتتحقق من أجل A - زمر. في هذه الحالة تكـــون التماثلات بين زمر القسمة المقابلة لمتسلسلتين تركيبيتين ثابتة. البرهان نفسه كما في المبرهنة العامة، لأنه استخدم التماثلات فقط، التي قد لاحظنا بأنها محققة أيضاً بالنسبة لـــ A - زمر.

مثال 27.6 (a) باعتبار الزمرة G زمرة كمؤثر على نفسها بالترافق. في هـــذه الحالـــة إن المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة هي متتالية من الزمر الجزئية

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s = \{1\}$$

حيث إن كل G_i ناظمية في G، أي أنها، متسلسلة ناظمية. إن تأثير G على G_i بـــالترافق ينفذ إلى زمر القسمة، ليعطي تأثير G على G_i / G_{i+1}. إن زمرتـــي القـــسمة لمتسلـــسلتين تركيبيتين ثابتتين تكونان متماثلتين كما في G - زمر.

(b) باعتبار G مع $A = \operatorname{Aut}(G)$ كزمرة من مؤثرات. في هذه الحالة، إن المتسلسلة تحت الناظمية الثابتة هي المتتالية

$$G \supset G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_s = \{1\}$$

حيث كل G_i زمرة جزئية مميزة في G، وزمر القـــسمة لمتسلـــسلتين تـــركيبيتين ثـــابتتين متماثلتين كما في $\operatorname{Aut}(G)$ - زمر.

مبرهنة كرول ــ سشميدت (Krull- Schmidt theorem)

تكون الزمرة G غير قابلة للتحليل إذا كان $G \neq 1$ و G لا تماثل جداء مباشر لزمرتين غير تافهتين، أي أنه، إذا كان

$$G \approx H \times H' \Rightarrow H = 1 \quad \text{أو} \quad H' = 1$$

مثال 28.6 (a) إن الزمرة البسيطة غير قابلة للتحليل، لكن الزمرة غير القابلة للتحليل ليست بالضرورة أن تكون بسيطة: يمكن أن تحوي على زمرة جزئية ناظمية. مثلاً، S_3 زمرة غير قابلة للتحليل لكنها تحوي على C_3 كزمرة جزئية ناظمية.

(b) تكون الزمرة التبديلية المنتهية غير قابلة للتحليل إذا وفقط إذا كانت دائرية رتبتها قوى لعدد أولي.

بالطبع، يكون هذا واضحاً من التصنيف، لكن ليس من الصعب برهانه مباشرةً. لتكن G دائرية من الرتبة p^n، وبفرض أن $G \approx H \times H'$. عندئذٍ يجب أن تكون كل من H و H' p - زمرة، ولا يمكن أن يكونا كلاهما من الرتبة p^m، $m < n$. وبالتالي فإنه يجب أن تكون إحداهما دائرية من الرتبة p^n، والثانية تافهة. بالعكس، بفرض أن G تبديلية وغير قابلة للتحليل. بما أن كل زمرة تبديلية منتهية (من الواضح) عبارة عن جداء مباشر لـ p - زمر حيث p يمسح كل الأعداد الأولية، تكون G p - زمرة. إذا كان العنصر g هو العنصر ذو الرتبة الأعلى في G، إحداها تبين بأن $\langle g \rangle$ هو عامل مباشر في G، $G \approx \langle g \rangle \times H$، وهذا تناقض.

(c) كل زمرة منتهية يمكن أن تكتب كجداء مباشر لزمر جزئية غير قابلة للتحليل (واضح).

مبرهنة 29.6 (Krull- Schmidt) بفرض أن G جداءاً مباشراً لزمر جزئية غير قابلة للتحليل $G_1,\ldots,G_s$ و جداء مباشر لزمر جزئية غير قابلة للتحليل $H_1,\ldots,H_t$:

$$G \quad G_1 \times \ldots \times G_s,\ G \quad H_1 \times \ldots \times H_t$$

عندئذٍ $s = t$، و هنا نعيد الدليل بحيث يكون $G_i \approx H_i$. وأكثر من ذلك، بإعطاء عدد ما r يمكن ترتيب الترقيم بحيث يكون

$$G = G_1 \times \ldots \times G_r \times H_{r+1} \times \ldots \times H_t$$

البرهان. انظر روتمان 1995,6.36.

مثال 30.6 لتكن $G = \mathrm{F}_p \times \mathrm{F}_p$، و نعتبره فضاءً متجهياً من البعد 2 فوق الحقل F_p. لتكن $G_1 = \langle (1,0) \rangle,\ G_2 = \langle (0,1) \rangle;\ H_1 = \langle (1,1) \rangle,\ H_1 = \langle (1,-1) \rangle,$.

عندئذٍ $G = G_1 \times G_2,\ G = H_1 \times H_2,\ G = G_1 \times H_2$.

ملاحظة 31.6 (a) إن مبرهنة Krull- Schmidt تحققت أيضاً بالنسبة لزمرة غير منتهية وقد برهنت محققةً شرطي المتسلسلة بالنسبة الزمر الجزئية، أي أن، المتتاليات المتزايدة والمتناقصة للزمر الجزئية في G تصبح ثابتة.

(b) إن مبرهنة Krull- Schmidt تحققت أيضاً بالنسبة لزمرة بمؤثرات. مثلاً، ليكن $\mathrm{Aut}(G)$ مؤثراً على G، فإن الزمر الجزئية في حالة المبرهنة ستكون جميعها مميزة.

(c) إذا طبقنا على الزمرة المنتهية الآبلية، تبين المبرهنة أن الزمر C_{m_i} في التحليل $G = C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$ حيث كل m_i عبارة عن قوى لعدد أولي محددة بشكل وحيد تحت سقف التماثل (والرتبة).

تمارين

1-6 لتكن G زمرة (ليست بالضرورة أن تكون منتهية) مع المتسلسلة التركيبية المنتهية

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = 1$$

ولتكن N زمرة جزئية ناظمية في G. بين أن

$$N = N \cap G_0 \supset N \cap G_1 \supset \ldots \supset N \cap G_n = 1$$

تتحول إلى متسلسلة تركيبية للزمرة N إذا لم يوجد تكرارات.

الفصل السابع

تمثيلات الزمر المنتهية

Representations of finite groups

في هذا الفصل، نعتبر G زمرة منتهية و F حقلاً. جميع الفضاءات المتجهية تكون ذات بعد منته. F - جبر هو حلقة A تحوي F في مركزها وذات بعد منته كما في F - فضاء متجهي. لن نعتبر A تبديلية.[20] كل A - مودولات تكون أبعادها منتهية عندئذٍ تعتبر و كأنها F - فضاء متجهي. بالنسبة لـ A - مودول V، يرمز mV للمجموع المباشر m مرة من V.

إن المقابل A^{opp} (opposite) لـ F - الجبر A هو نفسه كما في A ما عدا المقلوب بالنسبة للضرب، أي أنه، يوجد تطبيق تقابل $a \mapsto a' : A \leftrightarrow A^{\text{opp}}$ الذي يكون متماثلاً مع F - فضاء متجهي و يحقق الخاصة $a'b' = (ba)'$ إذا كان $a,b \in A$.

إن A - مودول غير المعدوم يكون بسيطاً (simple) إذا لم يحو على مودولات جزئية فعلية باستثناء المودول الصفري، و يكون نصف بسيط (semisimple) إذا كان متماثلاً مع المجموع المباشر لمودولات بسيطة.

التمثيلات المصفوفية (Matrix representations)

إن التمثيلات المصفوفية من الدرجة n للزمرة G على الحقل F هو تشاكل $G \to \mathrm{GL}_n(F)$. يقال بأن التمثيل أمين (faithful) إذا كان التشاكل متبايناً. لذلك فإن التمثيل الأمين يعرف G بزمرة من المصفوفات من النوع $n \times n$.

مثال 1.7 (a) يوجد تمثيل $Q \to \mathrm{GL}_2(\ )$ لزمرة القسمة $Q = \langle a,b \rangle$ التي ترسل a إلى $\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$ و b إلى $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. في الحقيقة، كما عرفنا Q بشكل أساسي كما في (1.17).

---

[20] لتكن $e_1,\ldots,e_n$ قاعدة لـ A مثل F - فضاء متجهي، عندئذٍ $e_i e_j = \sum_k a_{ij}^k e_k$ لبعض $a_{ij}^k \in F$، تدعى ثوابت البنية على A بالنسبة للقاعدة $(e_i)_i$، أحياناً تكون القاعدة قد اختيرت، إن الجبر A يكون محدداً بشكل وحيد بثوابت البنية فيه.

(b) لتكن $G=S_n$. لكل $\sigma\in S_n$، لتكن $I(\sigma)$ المصفوفة الحاصلة من المصفوفة المحايدة باستخدام σ لتبديل الأسطر. عندئذٍ، لأي مصفوفة A من النوع $n\times n$، نحصل على $I(\sigma)A$ من A وذلك باستخدام σ لتبديل الأسطر. بشكل خاص، $I(\sigma)I(\sigma')=I(\sigma\sigma')$، ومنه فإن $\sigma\mapsto I(\sigma)$ تمثيل لـ S_n.

من الواضح، أنه أمين. كما أن كل زمرة منتهية ترسل إلى S_n من أجل مجموعة من العناصر n (مبرهنة كايلي انظر 1. 21)، هذا يبين بأن كل زمرة منتهية تحوي على تمثيل مصفوفي أمين.

(c) لتكن $G=C_n=\langle\sigma\rangle$. إذا كان F يحوي على n جذر لـ 1، وليكن x، عندئذٍ يوجد التمثيل $\sigma^i\mapsto x^i:C_n\to \mathrm{GL}_1(F)=F^\times$. يكون التمثيل أميناً إذا وفقط إذا كان x من الرتبة n تماماً. إذا كان $n=p$ عدداً ابتدائياً و كان F يحوي على مميز p، عندئذٍ $X^p-1=(X-1)^p$، ومنه فإن 1 هو الجذر الوحيد لـ 1 من الدرجة p في F. في هذه الحالة، التمثيل يكون تافهاً، ولكن يوجد التمثيل الأمين

$$\sigma^i\mapsto\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{pmatrix}:C_p\to \mathrm{GL}_2(F).$$

2.7 برهن برنسايد على أن لمسألة برنسايد (انظر p33) جواب إيجابي للزمر الجزئية في $\mathrm{GL}_n(\;)$، أي أن، كل زمرة جزئية منتهية التوليد في $\mathrm{GL}_n(\;)$ بدليل منته تكون منتهية. لذلك، لا توجد زمرة منتهية التوليد غير منتهية بدليل منته ممثلة بشكل أمين على .

جذور 1 في الحقول

كما بيّن المثال الأخير، إن تمثيل الزمرة على الحقل F يعتمد على جذور 1 في الحقل. n جذر لـ 1 يشكل زمرة جزئية $\mu_n(F)$ في $F^\times$، التي تكون دائرية (انظر 55.1).

إذا كان مميز F يقسم n، عندئذٍ $|\mu_n(F)|<n$. من جهة أخرى، X^n-1 لها جذور مختلفة (سيكون الجذر المضاعف جذراً لمشتقها nX^{n-1})، ويمكننا دائماً أن نرتب $|\mu_n(F)|=n$ بتمديد F، مثلاً، بتبديل الحقل الجزئي F في $\mathbb{C}$ بـ $F[x]$ حيث $x=e^{2\pi i/n}$، أو بتبديل F بـ $F[X]/(g(X))$ حيث $g(X)$ عامل غير قابل للتحليل لـ X^n-1 لا يقسم X^m-1 لأي قاسم فعلي m لـ n.

يدعى العنصر من الرتبة n في $F^\times$ بالجذر الابتدائي (primitive) لـ 1. لكي نقول بأن F تحوي على n جذر ابتدائي لـ 1، x، نعني بأن الزمرة دائرية من الرتبة n و x يولدها (وبالتالي فإن مميز F يساوي 0 أو مميز ابتدائي لا يقسم n).

التمثيلات الخطية (Linear representations)

نتذكر من (1.4) أننا عرفنا مفهوم تأثير الزمرة G على مجموعة. عندما تكون المجموعة عبارة عن F - فضاء متجهي V، نقول بأن التأثير خطي (linear) إذا كان التطبيق

$$gv = V \to V , x \mapsto gx ,$$

خطياً لكل $g \in G$. عندئذٍ فإن معكوس gV هو التطبيق الخطي $\left(g^{-1}\right)V$، و $g \mapsto gv : G \to \mathrm{GL}(V)$ تشاكل. لهذا، من التأثير الخطي G على V، نحصل على التشاكل الزمري $G \to \mathrm{GL}(V)$، وبالعكس، كل تشاكل كهذا يعرف تأثيراً خطياً للزمرة G على V. ندعو التشاكل $G \to \mathrm{GL}(V)$ التمثيل الخطي (Linear- representation) للزمرة G على V. نلاحظ بأن التمثيل الخطي للزمرة G على F^n هو تماماً تمثيل مصفوفي من الدرجة n.

مثال 3.7 (a) ليكن $G = C_n = \langle s \rangle$، ولنفرض بأن F يحوي على n جذر ابتدائي لـ 1، وليكن x. ليكن $G \to \mathrm{GL}(V)$ تمثيلاً خطياً للزمرة G. عندئذٍ $\left(s_L\right)^n = \left(s^n\right)_L = 1$، وبالتالي فإن كثيرة الحدود الأصغرية لـ s_L تقسم $X^n - 1$. كما أن $X^n - 1$ لها n جذر مختلف $x^0, \ldots, x^{n-1}$ في F، يتحلل الفضاء المتجهي إلى مجموع مباشر للفضاءات الذاتية

$$V = \oplus_{0 \le i \le n-1} V_i , \quad V_i \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \in V \;\middle|\; s\ v = x^i v \right\}$$

بالعكس، كل تحليل إلى مجموع مباشر كهذا للزمرة G ينجم عن تمثيل G.

(b) لتكن G زمرة تبديلية من الأس n، ولنفرض بأن F تحوي على n جذر ابتدائي لـ 1. لتكن

$$G^{\vee} = \mathrm{Hom}\left(G, F^{\times}\right) = \mathrm{Hom}\left(G, m_n(F)\right)$$

إن تمثيل للزمرة G على الفضاء المتجهي V هو نفسه التحليل إلى مجموع مباشر

$$V = \oplus_{c \in G^{\vee}} V_c , \quad V_c \overset{\text{def}}{=} \left\{ v \in V \;\middle|\; sv = c(s)v \right\} .$$

عندما تكون G دائرية، وهذه إعادة للحالة (a)، والحالة العامة تأتي بسهولة (يتحلل V مع الحفاظ على تأثير العامل الدائري الأول في G، عندئذٍ يتحلل كل مجموع مع الحفاظ على تأثير العامل الدائري الثاني في G، وهكذا).

مبرهنة Maschke

ليكن $G \to \mathrm{GL}(V)$ تمثيلاً خطياً للزمرة G على F - فضاء متجهي V. يقال بأن الفضاء الجزئي W في V يكون G - لا متغيراً (invariant) إذا كان $gW \subset W$ لكل $g \in G$. يقال عن F - التطبيق الخطي $a : V \to V'$ للفضاءات المتجهية على الزمرة G التي تؤثر على بخطية أنه G - لا متغير إذا كان

$a(gv) = g(av)$ لكل $g \in G, v \in V$.

أخيراً، يقال عن الشكل ثنائي الخطية $f : V \times V \to F$ أنه G - لا متغير إذا كان

$f(gv, gv') = f(v, v')$ لكل $g \in G, v, v' \in V$.

مبرهنة 4.7 (Maschke) ليكن $G \to \mathrm{GL}(V)$ تمثيلاً خطياً للزمرة G. إذا كان مميز F لا يقسم $|G|$، عندئذٍ كل فضاء جزئي G - لا متغير W في V يحوي على متممة G - لا متغير، أي أنه، يوجد فضاء جزئي G - لا متغير W' بحيث يكون $V = W \oplus W'$.

نلاحظ بأنه تطبق المبرهنة دائماً عندما يكون مميز F هو المميز الصفري.

إن الشرط على المميز تحديداً ضروري. إذا كانت $G = \langle s \rangle$ زمرة دائرية من الرتبة p تؤثر على $V = F^2$ كما المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (انظر 3.7b)، عندئذٍ يكون الفضاء الجزئي $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$ G - لا متغير، لكن لا يوجد فضاء جزئي متمم $F \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, b \neq 0$، يكون G - لا متغير.

ولأهمية الفكرة المتضمنة، نقدم برهانين لمبرهنة Maschke.

برهان مبرهنة Maschke (في الحالة $F =$ أو)

تمهيدية 5.7 لتكن f تطبيقاً متناظراً ثنائي الخطية على V، و ليكن W فضاءً جزئياً على V. إذا كان كل من f و W G - لا متغير، عندئذٍ يكون أيضاً $W^{\perp} \overset{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(w, v) = 0, w \in W\}$.

البرهان. ليكن $v \in W^{\perp}$ و ليكن $g \in G$. $f(w, gv) = f(g^{-1}w, v)$، لأي $w \in W$ لأن f G - لا متغير، و $f(g^{-1}w, v) = 0$ لأن W أيضاً G - لا متغير. هذا يبين بأن $gv \in W^{\perp}$.

نتذكر من الجبر الخطي أنه إذا كان f ليس شاذاً، عندئــذٍ $V = W \oplus W^{\perp}$ وبالتــالي لكي نبرهن على مبرهنة Maschke، يكفي أن نبين بأنه يوجد G- لا متغير تطبيق ثنــائي الخطية متناظر $f : V \times V \to F$.

تمهيدية 6.7 تطبيق ثنائي الخطية متناظر f على V،

$$\bar{f}(v, w) \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(gv, gw)$$

يكون G- لا متغير تطبيقاً ثنائي الخطية متناظر على V.

البرهان. من الواضح بأن f تطبيق ثنائي الخطية ومتناظر، ومن أجل $g_0 \in G$،

$$\bar{f}(g_0 v, g_0 w) \overset{\text{def}}{=} \sum_{g \in G} f(g g_0 v, g g_0 w),$$

الذي يساوي $\sum_{g \in G} f(gv, gw)$ لأن، g تمسح كل G، وبالتالي فإن $g_0 g$ تمسح كل G.

لسوء الحظ، لا يمكن أن نتوقع بأن $\bar{f}$ ليس شاذاً عندما يكون f كذلك (من جهة أخرى استطعنا أن نبرهن بأن جميع $F[G]$- مودولات نصف بسيطة، دون التحديد علــى F أو G).

تمهيدية 7.7 ليكن $F =$. إذا كان f تطبيقاً ثنائي الخطية معرفاً موجباً على V، عندئذٍ يكون $\bar{f}$ كذلك أيضاً.

البرهان. إذا كان $\bar{f}$ معرفاً موجباً، عندئذٍ من أجل أي v غير صفري في V،

$$\bar{f}(v, v) = \sum_{g \in G} f(gv, gv) > 0$$

هذا يكمل برهان مبرهنة Maschke عندما $F =$ ، لأن يوجد تحديداً تطبيق f خطي معرف موجب على V. بالنقاش نفسه وباستخدام أشكال هرمتية عندما $F =$ (أو عنــدما يكون F أي حقل في).

برهان مبرهنة Maschke (في الحالة العامة)

يدعى التشاكل الذاتي p لـــ F- الفضاء المتجهي V إسقاطاً إذا كان $p^2 = p$. إن كثيرة الحدود الأصغرية للإسقاط (projector) p تقسم $X^2 - X = X(X-1)$، ومنه فإن V يتحلل إلى مجموع مباشر للحقول الذاتية،

$$V = V_0(p) \oplus V_1(p) \text{، حيث } \begin{cases} V_0(p) = \{v \in V \mid pv = 0\} = Ker(p) \\ V_1(p) = \{v \in V \mid pv = v\} = \operatorname{Im}(p) \end{cases}.$$

بالعكس، إن التحليل $V = V_0 \oplus V_1$ نجم عن المسقط (v_0, v_1) **a** $(0, v_1)$.

نفرض الآن بأن G تؤثر بخطية على V. إذا كان الإسقاط p يكون G - لا متغيــراً. فإنه، لكي نبرهن المبرهنة يكفي أن نبين بأن W هي صورة الإسقاط p G - لا متغير.

باختيار مرةً أخرى الإسقاط p F - خطي مع الصورة W، الذي يوجد بشكل محــدد، وعدل لنحصل على المسقط $\bar{p}$ G - لا متغير مع الصورة نفسها. لكل $v \in V$، ليكن

$$\bar{p}(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\left(p\left(g^{-1}v\right)\right)$$

الذي يحول اتجاهه لأن $|G|.1 \in F^{\times}$، و يعرف F - تطبيقــاً خطيــاً $\bar{p}: V \to V$. لأي $w \in W$، لأي $g^{-1}w \in W$ ومنه

$$\bar{p}(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\left(g^{-1}w\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} w = w \tag{21}$$

إن صورة $\bar{p}$ جزئية في W، لأن $\operatorname{Im}(p) \subset W$ و W عبارة عن G - لا متغير، ومنه

$$\bar{p}^2(v) \overset{\text{def}}{=} \bar{p}\left(\bar{p}(v)\right) \overset{(21)}{=} \bar{p}(v)$$

لأي $v \in V$. لهذا، يكون $\bar{p}$ إسقاطاً، وتبين العلاقة (21) بــأن $\operatorname{Im}(\bar{p}) \supset W$، وبالتــالي $\operatorname{Im}(\bar{p}) = W$. بقي أن نبين بأن $\bar{p}$ يكون G - لا متغير. لكل $g_0 \in V$

$$\bar{p}(g_0 v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g\left(p\left(g^{-1} g_0 v\right)\right) = g_0 \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(g_0^{-1} g\right)\left(p\left(g^{-1} g_0 v\right)\right),$$

الذي يساوي $g_0 \bar{p}(v)$ لأن، g يمسح كل G، وبالتالي فإن $g_0^{-1} g$ يمسح كل G.

جبر الزمر؛ نصف البسيطة (The group algebra; semisimplicity)

إن جبر الزمر (group algebra) $F[G]$ معرف ليكون $F[G]$ - فضاء متجهي بقاعــدة من عناصر G مع الجداءات التي تكون على G. لهذا،

- أي عنصر في $F[G]$ هو المجموع $\sum_{g \in G} c_g g, c_g \in F$،
- يكون العنصران $\sum_{g \in G} c_g g$ و $\sum_{g \in G} c'_g g$ في $F[G]$ متساويين إذا وفقط إذا كان $c_g = c'_g$ لكل g و
- $\left(\sum_{g \in G} c_g g\right)\left(\sum_{g \in G} c'_g g\right) = \sum_{g \in G} c''_g g, \; c''_g = \sum_{g_1 g_2 = g} c_{g_1} c'_{g_2}$ و

التأثير الخطي

$$g, v \mapsto gv : G \times V \to V$$

للزمرة G على F - الفضاء المتجهي يتحدد بشكل وحيد إلى تأثير $F[G]$ على V،

$$\sum_{g \in G} c_g g, v \mapsto \sum_{g \in G} c_g gv : F[G] \times V \to V,$$

الذي يحول V إلى $F[G]$ - مودول. المودولات الجزئية لهذا التأثير هي تماماً الفضاءات الجزئية G - لا متغيرة.

ليكن $G \to GL(V)$ تمثيلاً خطياً للزمرة G. عندما يكون V بسيطاً (نصف بسيط) وكذلك $F[G]$ - مودول، يقال عادةً بأن التمثيل غير خزول (irreducible)(قابل للتحليل بشكل تام completely reducible)). على أي حال، سوف نسميهم تمثيلاً بسيطاً (نصف بسيط).

قضية 8.7 إذا كان مميز F لا يقسم $|G|$، عندئذٍ كل $F[G]$ - مودول هو مجموع مباشر لمودولات جزئية بسيطة.

البرهان. ليكن V $F[G]$ - مودول. إذا كان V بسيطاً، عندئذٍ لا يوجد أي شيء لبرهانه. من جهة أخرى، يحوي على مودول جزئي فعلي غير معدوم W. من مبرهنة Maschke ، $V = W \oplus W'$ حيث W عبارة عن $F[G]$ - مودول. إذا كان كل من W و W' بسيطاً، عندئذٍ يتم البرهان، ومن جهة أخرى، يمكن أن نتابع النقاش، الذي ينتهي بعدد منته من الخطوات لأن V ببعد منته كما أنه F - فضاء متجهي.

كما أنه نكون قد لاحظنا، بأن التمثيل الخطي للزمرة G يمكن أن يعتبر $F[G]$ - مودول. لهذا، حتى نفهم التمثيل الخطي للزمرة G، يجب أن نفهم $F[G]$ - مودولات، و لهذا يجب أن نفهم بنية F - الجبر $F[G]$. في المقطع الثالث التالي ندرس F - الجبر و مودولاتها، بشكل خاص، نبرهن مبرهنات ويدربورن المشهورة المتعلقة بـ F - الجبور التي تكون مودولاتها نصف بسيطة.

المودولات نصف البسيطة (Semisimple modules)

في هذا الفقرة، نعتبر A، F - جبراً.

قضية 9.7 كل A - مودول V يمكن أن يكون كعلاقة الاحتواء

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_s = \{0\}$$

بحيث تكون زمر القسمة V_i / V_{i+1} A - مودولات بسيطة. إذا كان

$$V = W_0 \supset W_1 \supset \ldots \supset W_t = \{0\}$$

علاقة الاحتواء الثانية عندئذٍ $s = t$ و توجد تبديلة s للمجموعة $\{1,\ldots,s\}$ بحيث يكون $V_i / V_{i+1} \approx W_{s(i)} / W_{s(i)+1}$ لكل i.

البرهان. إن هذا مختلف عن مبرهنة جوردان- هولدر (2.6)، والذي يبرهن بنفس الطريقة.

تمهيدية 10.7 بفرض

$$V \approx V_1 \oplus \ldots \oplus V_s \approx V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_t$$

مع كل A - مودولات V_i و W_j البسيطة. عندئذٍ $s = t$ و يوجد تبديلـة s للمجموعة $\{1,\ldots,s\}$ بحيث يكون $V_i \approx W_{s(i)}$.

البرهان. كل تحليل يعرف علاقة احتواء، والتي من الممكن تطبيق القضية عليها.

قضية 11.7 ليكن V، A - مودول. إذا كان V مجموع مودولات جزئية بسيطة، نقـول بأن $V = \sum_{i \in I} S_i$ (ليس من الضروري أن يكون المجموع مباشراً)، عندئذٍ لأي مـودول جزئي W في V، توجد مجموعة جزئية J في I بحيث يكون

$$V = W \oplus \bigoplus_{i \in J} S_i$$

البرهان. لـتكن J المجموعـة الجزئيـة الأعظميـة فـي I بحيـث يكـون المجمـوع $S_J \overset{\text{def}}{=} \sum_{j \in J} S_j$ مباشراً و $W \cap S_J = V$. أدعي أن $W + S_J = V$ (بالتالي فـإن V مجموع مباشر لــ W و S_J حيث $j \in J$). أولاً، لهذا، يكفي أن نبرهن بأن كل من S_i محتواة في $W + S_J$. لأن S_i بسيطة، $S_i \cap (W + S_J)$ يساوي S_i أو 0. فـي الحالـة الأولى، $S_i \subset (W + S_J)$، وفي الحالة الثانيـة $S_J \cap S_i = 0$ و $W \cap (S_J + S_i) = 0$، وهذا يتناقض مع تعريف I.

نتيجة 12.7 إن الشروط الآتية على A - مودول V متكافئة:

(a) V نصف بسيط،

(b) V مجموع لمودولات جزئية بسيطة،

(c) كل مودول جزئي في V له متممة.

البرهان. تبين القضية بأنه من (b) ينتج (c)، ومن النقاش في برهان (7.8) مـن (c) ينـتج (a). ومن الواضح أنه من (a) ينتج (b).

نتيجة 13.7 إن مجموع، المودولات الجزئية، و مودولات زمر القسمة للمـودولات نـصف البسيطة هي نصف بسيطة.

البرهان. كل منها عبارة عن مجموع مودولات بسيطة.

F - الجبور البسيطة و مودولاتها (Simple F-algebra modules)

يقال عن F - الجبر A أنه بسيط إذا لم يحو على مثاليات فعلية ثنائيـة الجانـب غيـر 0. سنجعله يتكرر باستخدام التوضيح الآتي:

إن نواة التشاكل $B \to A : f$ لــ F - الجبور هو المثالي A الــذي لا يحــوي 1، لذلك، إذا كان A بسيطاً،
عندئذٍ f متباين.

مثال 14.7 نأخذ المصفوفة الجبريــة $M_n(F)$. لكــل $A,B \in M_n(F)$، العمــود j، $(AB)_j$ لــ AB هو AB_j حيث B_j العمود j في B. لذلك، من أجل مصفوفة معطاة B،

$$B_j = 0 \Rightarrow (AB)_j = 0$$

$$B_j \neq 0 \Rightarrow (AB)_j \quad \text{يمكن أن يكون اختيارياً}$$

وبالتالي فإن المثالي اليساري لــ $M_n(F)$ هو مجموعة مــن الــشكل $L(I)$ حيــث I مجموعة جزئية من $\{1,2,...,n\}$ و $L(I)$ مجموعة المصفوفات التي يكون فيها الأعمدة j تساوي الصفر لكل $j \notin I$. بحالة خاصة، المثاليات الأصغرية اليسارية هــي المجموعــات $L(\{j\})$. مثلاً،

$$L(\{2,4\}) = \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad L(\{3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

هي، على الترتيب، المثالي اليساري و المثالي اليساري الأصغري. للمثاليات اليمينية الــشكل نفسه بالنسبة للحدود في الأسطر، ومنه فإن أي مثالي ثنــائي الجانــب غيــر معــدوم فــي $M_n(F)$ يشكل حلقة كاملة. $M_n(F)$ عبارة عن F - جبر بسيط.

مثال 15.7 يقال عن F - جبر أنه جبر تقسيم إذا كان لكل عنصر غير معدوم a معكوســاً، أي أنه، يوجد b بحيث يكون $ab = 1 = ba$. لهذا فإن جبر التقسيم يحقــق كــل المــسلمات ليكون حقلاً ما عدا القانون التبديلي (ولهذا السبب يدعى أحياناً حقــلاً غيــر تبــديلي). مــن الواضح، أن جبر التقسيم لا يحوي على مثاليات فعلية، يسارية، يمينية، أو ثنائيــة الجانــب، وبالتالي فهي بسيطة.

إذا كان D جبر تقسيم (division algebra)، عندئذٍ، كما في (7.14)، المثالي اليساري في $M_n(D)$ هو مجموعات من الشكل $L(I)$ و $M_n(D)$ التي تكون بسيطة.

مثال 16.7 لكل $a,b \in F^{\times}$، ولتكن $H(a,b)$ عبــارة عــن F - جبــر مــع القاعــدة $1,i,j,k$ (F - فضاء متجهي) والضرب المحدد بــ

$$i^2 = a, \;\; j^2 = b, \;\; ij = k = -ji$$

(ومنه $ik = iij = aj$ الخ.). عندئذٍ $H(a,b)$ عبارة عن F - جبر، يدعى الجبر الرباعي (quaternion algebra) على F. مثلاً، إذا كان $F =$ ، عندئذٍ $H(-1,-1)$ الجبر الرباعي العام. يمكننا أولاً أن نبين بأن $H(a,b)$ إما جبر تقسيم أو يتماثل مع $M_2(F)$. بشكل خاص، يكون بسيطاً.

17.7 الكثير من الجبر الخطي لا يتطلب بأن يكون الحقل تبديلياً. مثلاً، النقاشات العامة تبين بأن المودول المنتهي التوليد V فوق جبر التقسيم D له قواعد ، وأن كل قواعده تحوي على العدد نفسه n - نسمي n بعد (dimension) V. بحالة خاصة، جميع D - مودولات المنتهية التوليد تكون حرة.

18.7 ليكن A F - جبر، و لنعتبر $_A A$ رمزاً لـ A - مودول يساري. الجداء من اليمين $x \mapsto xa$ على $_A A$ بالعنصر a في A يكون A - تشاكلاً ذاتياً خطياً لـ $_A A$. علاوةً على ذلك، كل A - تطبيق خطي $j : {}_A A \to_A A$ هو من هذا الشكل $a = j(1)$. لهذا،

$$\mathrm{End}_A({}_A A) \quad A$$ (نعتبره F - فضاءً متجهياً)

ليكن j_a التطبيق $x \mapsto xa$. عندئذٍ

$$(j_a \circ j_{a'})(1) \overset{\text{def}}{=} j_a(j_{a'}(1)) = j_a(a') = a'a = j_{a'a}(1)$$

ومنه

$$\mathrm{End}_A({}_A A) \quad A^{\mathrm{opp}}$$ (نعتبره F - جبر)

وبالتعميم،

$$\mathrm{End}_A(V) \quad A^{\mathrm{opp}}$$

لأي A - مودول V الذي يكون حراً من المرتبة (rank) 1، و

$$\mathrm{End}_A(V) \quad M_n(A^{\mathrm{opp}})$$

لأي A - مودول حر V من المرتبة n (cf. 7.30).

الممركزات (Centralizers)

ليكن A، F - جبراً جزئياً في F - الجبر B. إن ممركز (centralizer) A في B هو

$$C_B(A) = \{b \in B \mid ba = ab,\ \forall a \in A\}$$

وهو أيضاً F - جبر جزئي في B.

مثال 19.7 في الأمثلة الآتية، تؤخذ المراكز من $M_n(F)$.

(a) لتكن A مجموعة من المصفوفات السلمية في $M_n(F)$، أي أن، $A = FI_n$.
من الواضح، $C(A) = M_n(F)$.

(b) لتكن $A = M_n(F)$. عندئذٍ فإن $C(A)$ هو مركز $M_n(F)$، الذي نحسبه الآن. لتكن e_{ij} المصفوفة الذي يكون فيها 1 في الموضع (i,j) والصفر في بقية المواضع، لذلك

$$e_{ij}e_{lm} = \begin{cases} e_{im}, & j = l \\ 0, & j \neq l \end{cases}$$

لتكن $a = (a_{ij}) \in M_n(F)$. عندئذٍ $a = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}$ ومنه $a\, e_{lm} = \sum_i a_{il} e_{im}$ و $e_{lm} a = \sum_j a_{mj} e_{lj}$. إذا كان a في مركز $M_n(F)$، عندئذٍ $a\, e_{lm} = e_{lm} a$، ومنه $a_{il} = 0$ لكل $i \neq l$، $a_{mj} = 0$ لكل $j \neq m$، و $a_{ll} = a_{mm}$. وبالتالي فإن مركز $M_n(F)$ هو مجموعة من المصفوفات السلمية $F.I_n$. لهذا $C(A) = F.I_n$.

(c) لتكن A مجموعة كل المصفوفات القطرية في $M_n(F)$. في هذه الحالة، $C(A) = A$.

نلاحظ أنه في الحالات الثلاث، $C(C(A)) = A$.

مبرهنة 20.7 (مبرهنة المراكزات المزدوجة)

ليكن A، F - جبراً، وليكن V، A - مودول نصف بسيط أميناً. عندئذٍ $C(C(A)) = A$ (المراكز مأخوذة من $\mathrm{End}_F(V)$).

البرهان. ليكن $D = C(A)$ و ليكن $B = C(D)$. من الواضح أن $A \subset B$، ويأتي الاحتواء المعاكس من التمهيدية الآتية عندما نأخذ $v_1,...,v_n$ لتولد V باعتباره F - فضاء متجهي.

تمهيدية 21.7 لأي $v_1,...,v_n \in V$ و $b \in B$، يوجد $a \in A$ بحيث يكون

$$av_1 = bv_1,\ av_2 = bv_2, ...,\ av_n = bv_n$$

البرهان. نبرهن ذلك أولاً من أجل $n = 1$. نلاحظ بأن Av_1 عبارة عن A - مودول جزئي في V، ومنه (انظر 12.7) يوجد A - مودول جزئي W في V بحيث $V = Av_1 \oplus W$. ليكن $p : V \to V$ التطبيق $(av_1, w) \mapsto (av_1, 0)$ (الإسقاط الغامر

على Av_1). إنه A - خطي، وبالتالي يقع في D، و يحقق الخاصة $p(v)=v$ إذا وفقط إذا كان $v \in Av_1$. الآن

$$p(bv_1)=b(pv_1)=bv_1,$$

ومنه $bv_1 \in Av_1$. كما هو مطلوب.

نبرهن الآن الحالة العامة. ليكن W المجموع المباشر لـــ V، n مرة بالتأثير القطري A، أي أن،

$$a(v_1,...,v_n)=(av_1,...,av_n),\ a\in A,\ v_i \in V$$

عندئذٍ فإن W عبارة عن A - مودول نصف بـــسيط أيـــضاً (13.7). إن ممركـــز A فـــي $\text{End}_F(W)$ تتألف من المـــصفوفات $(g_{ij})_{1\le i,j\le n},\ g_{ij}\in \text{End}_F(V)$، بحيـــث يكـــون $(g_{ij}a)=(ag_{ij})$ لكـــل $a\in A$، أي أن، $g_{ij}\in D$ (cf. 30.7). بكلمـــات أخـــرى، إن ممركز A في $\text{End}_F(A)$ هي $M_n(D)$. نناقش كما في المثـــال 7.19(b)، باســـتخدام المصفوفات $e_{ij}(d)$ حيث يتوضع d في الموضع ij و الصفر ببقية المواضع، يبين بـــأن ممركز $M_n(D)$ في $\text{End}_F(W)$ يتألف من المصفوفات القطرية

$$\begin{pmatrix} b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{pmatrix}$$

حيث $b\in B$. نطبق الآن الحالة $n=1$ من التمهيدية بالنسبة لـــ A، W، b، و الشعاع $(v_1,...,v_n)$ ليتم البرهان.

مبرهنة 22.7 كل F - جبر بسيط متماثل مع $M_n(D)$ لبعض من n و بعـــض F - جبر تقسيم D.

البرهان. نختار A - مودول بسيط S، مثلاً، أي مثالي يساري أصغري فـــي A. عندئـــذٍ يؤثر A على S بشكل أمين، لأن النواة لـــ $A\to \text{End}_F(S)$ ستكون مثالي ثنائي الجانب في A لا يحوي على 1، وبالتالي يساوي 0.

ليكن D ممركز A في F - جبر $\text{End}_F(S)$ لـــ F - التطبيق الخطـــي $S\to S$. بالعودة إلى مبرهنة الممركزات المزدوجة (20.7)، فإن ممركز D في $\text{End}_F(S)$ هـــي A، أي أن، $A=\text{End}_D(S)$. إن تمهيدية شور (23.7) تبين بأن D جبر تقسيم. لذلك فإن

D S - مودول حر (17.7)، نقول، $S \approx D^n$، ومنه $\mathrm{End}_D(S) \approx M_n(D^{\mathrm{opp}})$ (انظر 7.18).

تمهيدية 23.7 (تمهيدية شــور) لكــل F - جبــر A و A - مــودول بــسيط S، إن $\mathrm{End}_A(S)$ جبر تقسيم.

البرهان. ليكن g، F - التطبيق الخطي $S \to S$. عندئذٍ $\mathrm{Ker}(g)$ A - مودول جزئــي في S، وبالتالي فهو يساوي S أو يساوي 0. في الحالة الأولى، g يساوي الصفر، وفــي الحالة الثانية يشكل تماثلاً، أي أن، له معكوس وهو أيضاً A - خطي.

المودولات على F - الجبور البسيطة

لأي F - الجبر A، المودولات الجزئية فــي $_A A$ هــي مثاليــات يــسارية فــي A، و المودولات الجزئية البسيطة في $_A A$ هي مثاليات أصغرية بسيطة.

قضية 24.7 إن أي مثاليين يساريين أصغريين من F - الجبر البسيط متمــاثلان كـــ A - المودولات اليسارية، و $_A A$ مجموع مباشر لمثالياته اليسارية الأصغرية.

البرهان. بعد المبرهنة 22.7، يمكن أن نفرض أن $A = M_n(D)$ لبعض الجبور البــسيطة D. ذكرنا في (15.7) أن المثاليات الأصغرية في $M_n(D)$ من الشكل $L(\{j\})$. مــن الواضح $A = \oplus_{1 \le j \le n} L(\{j\})$ و كل $L(\{j\})$ متماثل مــع D^n بتــأثير طبيعــي فــي $M_n(D)$.

مبرهنة 25.7 ليكن F - الجبر البسيط A، و ليكن A - المودول البسيط S. عندئذٍ كــل A - مودول يكون متماثلاً مع المجموع المباشر لعدد من S.

البرهان. ليكن S_0 المثالي الأصغري اليساري في A. تبين القضية بأن $_A A \approx S_0^n$ لبعض n. لتكن $e_1, \ldots, e_r$ مجموعة من مولدات V كذلك A - مودول. التطبيق

$$(a_1, \ldots, a_r) \mapsto \sum a_i e_i$$

نعتبر V كزمرة قسمة من المجموع المباشر r مرة من $_A A$، وبالتالي فإنها زمرة قــسمة من $n r S_0$.

لهذا، إن V عبارة عن مجموع مباشر لمودولات جزئية بسيطة كل منها يماثــل S_0، ومــن القضية 11.7 نجد بأن $V \approx mS_0$ لبعض m.

نتيجة 26.7 ليكن F - الجبر البسيط A. عندئذٍ أي A - مودولين جزئيين بسيطين يكونان متماثلين، وأي A - مودولين لهما البعد نفسه على F متماثلين.

البرهان. واضح من المبرهنة.

نتيجة 27.7 إن العدد n في المبرهنة 7.22 محدد بـــ A بشكل وحيد، و D محدد بشكل وحيد تحت سقف التماثل.

البرهان. إذا كان $A \approx M_n(D)$، عندئذٍ $D \approx \mathrm{End}_A(S)$ لأي A - المـــودول البـــسيط S. لهذا، ومن المبرهنة 25.7 يتم المطلوب.

تصنيف جبور التقسيم على F

بعد المبرهنة 22.7، لكي نصنف الجبور البسيطة على F، بقي تصنيف جبور التقسيم علـــى F.

قضية 28.7 عندما يكون F مغلق جبرياً، إن جبر التقسيم الوحيد على F هو F نفسه.

البرهان. ليكن D جبر تقسيم على F. لأي $a \in D$، إن F - الجبر الجزئي $F[a]$ في D المولد بـــ a هو حقل (لأنه منطقة تكاملية من درجة منتهية على F). لذلك $a \in F$.

29.7 إن تصنيف صفوف التماثل لجبور التقسيم على الحقل هو واحد من المسائل الهامة و الصعبة في الجبر ونظرية الأعداد. من أجل $F =$ ، يكون جبر التقسيم الوحيد هو الجبـــر الرباعي العادي. إذا كان F منتهياً، فإن جبر التقسيم الوحيـــد بمركـــز F هـــو F نفـــسه (مبرهنة ويدربورن).

يسمى جبر التقسيم على F الذي مركزه F مركزياً (central) (ناظمي سابقاً (normal)). بين بروفير بأن مجموعة صفوف التماثلات لجبور التقسيم المركزية على حقل يشكل زمـــرة، سميت (بـــ هاس و نوثير) زمرة بروايز(Brauer group) [21] للحقل. إن معنى ما جاء في

---

[21] إن الجداء التنسوري (tensor product) $D \otimes_F D'$ لجبرين بسيطين مركزيين على F هو جبـــر بـــسيط مركزي أيضاً، و بالتالي يكون متماثلاً مع $M_r(D'')$ لبعض من الجبور البسيطة المركزية D''. نعرف

$$[D][D'] = [D'']$$

إن هذا الجداء تجميعي لأن الجداءات التنسورية تجميعية، صف تماثل F هو العنصر الحيادي، و $\left[D^{opp}\right]$ هو معكوس $[D]$.

الفقرة الأخيرة هو أن زمر برواير للحقول المغلقة جبرياً والحقول المنتهية هـــي الـــصفر، إن زمرة برواير في   من الرتبة 2. أحصيت زمر برواير في   و تمديداتها المنتهيـــة مـــن قبل ألبيرت، برواير، هاس، و نوثير في عام 1930 كنتيجة لصف نظرية الحقول.

F - الجبور نصف البـــسيطة ومودولاتهـــا (Semisimple F - algebras and their modules)

يقال إن F - الجبر A أنه نـــصف بـــسيط إذا كـــان كـــل A - مـــودول نـــصف بـــسيط (semisimple). تبين لنا المبرهنة 7.25 أن F - الجبور البسيطة تكون نصف بـــسيطة، و تبين مبرهنة ماسشك بأن جبر الزمرة $F[G]$ نصف بسيط عندما تكون رتبـــة G لا تقبـــل القسمة على مميز F (انظر 8.7).

قبل عرض النتيجة الرئيسية لهذه الفقرة، نتذكر بعضاً من مبرهنات المودولات الأساسية.

30.7 ليكن F - الجبر A، ولنأخذ المودولات

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$$
$$N = N_1 \oplus \cdots \oplus N_n$$

وليكن A - التطبيق الخطي $a : M \to N$. لكل $x_j \in M_j$، وليكن

$$a\left(0,\ldots,0,x_j,0,\ldots,0\right) = \left(y_1,\ldots,y_m\right)$$

عندئذٍ فإن $x_j \to y_i$ عبارة عن A - التطبيق الخطي $M_j \to N_i$، والـــذي نرمـــز لـــه بالرمز a_{ij}. لهذا، فإن a يعرف المصفوفة $m \times n$ الذي يكون فيها المعامل ij عبارة عن A - التطبيق الخطي $M_j \to N_i$. وبالعكس، كل مصفوفة كهـــذه $\left(a_{ij}\right)$ تعـــرف A - التطبيق الخطي $M \to N$، تحديداً،

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11}\left(x_1\right) + \cdots + a_{1n}\left(x_n\right) \\ \vdots \\ a_{i1}\left(x_1\right) + \cdots + a_{in}\left(x_n\right) \\ \vdots \\ a_{m1}\left(x_1\right) + \cdots + a_{mn}\left(x_n\right) \end{pmatrix}$$

وبهذا، نرى

$$\operatorname{Hom}_A(M,N) \quad \left(\operatorname{Hom}_A(M_j,N_i)\right)_{1\le j\le n,1\le i\le m} \tag{22}$$

(تماثل لـــ F - الفضاءات المتجهية). إذا كان $M=N$ ، يصبح هذا التماثل تماثلاً لـــ F - جبور. مثلاً، إذا كانت M مجموعاً مباشراً لـــ m مرة من M_0 ، عندئذٍ

$$\operatorname{End}_A(M) \quad M_m\left(\operatorname{End}_A(M_0)\right) \tag{23}$$

(مصفوفات من النوع $m\times m$ حيث إن معاملاتها مأخوذة من الحلقة $\operatorname{End}_A(M_0)$).

مبرهنة 31.7 كل F - جبر نصف بسيط A يكون متماثلاً مع جداء F - جبر بسيط.

البرهان. باختيار A - التماثل الخطي ${}_AA\to\oplus_i r_iS_i$ حيث S_i A - مودولات بسيطة، ولا يوجد تماثل بين أي اثنتـــين منهمـــا. عندئـــذٍ $\operatorname{End}_A({}_AA)\approx\operatorname{End}_A(\oplus_i r_iS_i)$. لأن $\operatorname{Hom}_A(S_j,S_i)=0$ لكل $i\ne j$ ،

$$\operatorname{End}_A(\oplus_i r_iS_i) \quad \prod_i \operatorname{End}_A(r_iS_i) \qquad \text{من } (22)$$

$$\prod_i M_{r_i}(D_i) \qquad \text{من } (23)$$

حيث $D_i=\operatorname{End}_A(S_i)$. ومن جهة أخرى، $A^{\text{opp}} \quad \operatorname{End}_A(A)$ من (7.18)، و لذلك

$$A^{\text{opp}}\approx\prod_i M_{r_i}(D_i)$$

وبتطبيق الجبر المعاكس ، نحصل على التماثل

$$A\approx\prod_i M_{r_i}\left(D_i^{\text{opp}}\right)$$

بالعودة إلى تمهيدية شور (23.7)، يكون D_i جبـــر تقـــسيم، ومـــن (7.15) نجـــد بـــأن $M_{r_i}\left(D_i^{\text{opp}}\right)$ عبارة عن F - جبر بسيط.

مودولات على F - جبور نصف بسيطة (Modules over semisimple *F*- Algebras)

ليكن $A=B\times C$ جداء لـــ F - جبور. إن B - مودول M يتحول إلـــى A - مـــودول بالتأثير

$$(b,c)m = bm$$

مبرهنة 32.7 ليكن F - جبر نصف البسيط، و ليكن $A = A_1 \times ... \times A_t$ حيث إن كل من A_i عبارة عن F - جبر بسيط. لكل A_i، ليكن A_i - مودول بسيط S_i (cf. 26.7).

(a) كل S_i عبارة عن A - مودول بسيط، و كل A - مودول بسيط متماثل مع S_i تماماً.

(b) كل A - مودول يتماثل مع $\oplus_i r_i S_i$ لبعض $r_i \in$ ، و يكون المودولان $\oplus_i r_i S_i$ و $\oplus_i r_i' S_i$ متماثلين إذا وفقط إذا كان $r_i = r_i'$ لكل i.

البرهان. (a) من الواضح بأن كل من S_i بسيط عندما نعتبره A - مودول، و لا يوجد تماثل بين أي اثنين منهما. وبالتالي من (7.24) نجد بأن ${}_A A \approx \oplus r_i S_i$ لبعض $r_i \in$. ليكن A - مودول بسيط S، و ليكن x عنصر غير معدوم في S. عندئذٍ فإن التطبيق $a x : {}_A A \to S$ غامر، وبالتالي فإن مقصوره على مجموعة S_i في ${}_A A$ لا يساوي الصفر، وبالتالي فهو تماثل.

(b) يبرهن على الجزء الأول من (a) ومن تعريف الحلقة نصف البسيطة، وعلى الجزء الثاني من (10.7).

تمثيلات G (The representation of G)

قضية 33.7 إن بعد مركز $F[G]$ باعتباره F - فضاء متجهي هو عدد صفوف الترافق في G.

البرهان. ليكن $C_1, ..., C_t$ صفوف الترافق في G، و، لكل i، ليكن c_i العنصر $\sum_{a \in C_i} a$ في $F[G]$. سنبرهن على الحالة الأقوى:

$$\text{إن مركز } F[G] \text{ هو } F_{c_1} \oplus ... \oplus F_{c_t} \qquad (24)$$

بما أن $c_1, ..., c_t$ مستقلة خطياً، لذلك يكفي أن نبين بأنها تولد المركز.

لأي $g \in G$ و $\sum_{a \in G} m_a a \in F[G]$،

$$g\left(\sum_{a \in G} m_a a\right) g^{-1} = \sum_{a \in G} m_a g a g^{-1}$$

إن معامل a من اليمين في المجموع هو $m_{g^{-1}ag}$، ومنه

$$g\left(\sum_{a\in G} m_a a\right)g^{-1}=\sum_{a\in G} m_{g^{-1}ag}\, a$$

يبين هذا بأن $\sum_{a\in G} m_a a$ ينتمي إلى مركز $F[G]$ إذا وفقط إذا كانت الدالـــة $a \mapsto m_a$ ثابتة في صفوف الترافق، أي أن، إذا وفقط إذا كان $\sum_{a\in G} m_a a\in\sum_i Fc_i$.

ملاحظـــة 34.7 يمكـــن أن نعتبـــر عـــن العنـــصر $\sum_{a\in G} m_a a$ فـــي $F[G]$ بـــالتطبيق $a \mapsto m_a : G\to F$. بهذه الطريقة، $F[G]\approx \mathrm{Map}(G,F)$. إن تأثير G على $F[G]$ يتمثل بالتأثير $(gf)(a)=f\left(g^{-1}a\right)$ لـــكل $g\in G$ بالنسبة للدالة $f: G\to F$. فـــي البرهان السابق، بينا بأن عناصر مركز $F[G]$ تتمثل تماماً بالدالـــة $f: G\to F$ والتـــي تكون ثابتة على كل صف ترافق. تسمى هذه الدوال بدوال الصف (class function).

في ما تبقى في هذا الفصل، نفرض أن F حقل مميزه يساوي الـــصفر بحيـــث يكـــون $F[G]$ يتماثل مع جداء جبور المصفوفات على F. مثلاً، يمكن أن نأخذ F ليكون حقـــلاً مغلق جبرياً مميزه يساوي الصفر ، مثلاً، [22].

يدعى التمثيل $G\to \mathrm{GL}\left({}_{F[G]}F(G)\right)$ بالتمثيل المنظم (regular representation).

مبرهنة 35.7 (a) إن عدد صفوف التماثل في $F[G]$ - مودولات بسيطة متساوية مع عدد صفوف الترافق في G.

(b) إن جداء أي تمثيل بسيط S في تمثيل منتظم يساوي درجته $\dim_F S_i$.

(c) لتكن $s_1,\dots,s_t$ مجموعة تمثيلات لصفوف متماثلة من G $F-$ مودولات بـــسيطة، وليكن $f_i=\dim_F S_i$ عندئذٍ

$$\sum_{1\le i\le t} f_i^{\,2}=|G|$$

البرهان. (a) من الفرض، $F[G]\approx M_{f_1}(F)\times\ldots\times M_{f_t}(F)$ لمجموعة مـــن الأعـــداد الصحيحة $f_1,\dots,f_t$.

---

[22] من مبرهنة ماشك (7.8)، يكون عندئذٍ $F[G]$ نصف بسيط، وبالتالي يكون جداءً مباشراً لجبور بسيطة (7.32). كل منها عبارة عن جبر المصفوفات على جبر تقسيم (7.22)، لكن جبر التقسيم الوحيد الذي يكون حقلاً مغلق جبرياً هو الحقل نفسه (7-28).

من المبرهنة 32.7، يكون عدد صفوف التماثل من $F[G]$ - المودولات البسيطة هو عـدد العوامل t. إن مركز الجداء F - الجبور يساوي جـداء مراكزهـا، و بالتـالي إن مركـز $F[G]$ متماثل مع $t\,F$. لذلك فإن t يساوي بعد مركز F، الذي نعلم بأنه يساوي عـدد صفوف الترافق في G.

(b) باستخدام الرموز في (14.7)، $L(\{1\})\oplus \ldots \oplus L(\{r\})$ $M_f(F)$.

(c) ببساطة نحصل على المساواة

$$\dim_F F[G] = \sum_{1\le i\le t} {}_F \dim M_{f_i}(F)$$

ميزات G (The characters of G)

نتذكر بأن الأثر $\mathrm{Tr}_V(a)$ للتشاكلات الذاتية $a : V \to V$ فـي الفـضاء المتجهـي هـو $\sum a_{ij}$ حيث (a_{ij}) مصفوفة a بالنسبة لبعض القواعد لـ V. إنها مستقلة عن اختيـار القواعد (إن أثار المصفوفات المترافقة متساوية).

نحصل من كل تمثيل $\mathrm{GL}(V)$ $g \mapsto gv : G \to$، على الدالة cV على G،

$$cV(g) = Tr_V(gv)$$

يدعى بالميزة (character) r. نلاحظ بأن $c\,V$ يعتمد على صف التماثل لـ $F[G]$ - مودول V، وبأن cV عبارة عن دالة صفية. يقال بأن الميـزة c بـسيطة (simple) (أو غير خزولة) (irreducible) إذا كانت معرفة على FG - مودول بسيط. إن الميزة الأساسية (principal character) c_1 هي تلك الميزة المعرفة بالتمثيـل التافـه للزمـرة G (ومنـه $c_1(g)=1$ لكل $g \in G$)، و الميزة المنتظمة (regular character) c_{reg} هـي تلـك الميزة المعرفة بالتمثيل المنتظم. بحساب $c_{reg}(g)$ باسـتخدام عناصـر G كقواعـد لـ $F[G]$، في البداية نرى بأن $c_{reg}(g)$ هو عدد العناصر a في الزمرة G بحيث يكـون $ga = a$، ومنه

$$c_{reg}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0 & , \; g \ne e \end{cases}$$

عندما يكون V من البعد 1، عندئذٍ يقال بأن الميزة c_V خطية (linear). في هذه الحالة، $F^{\times} \quad \mathrm{GL}(V)$، و منه $c_V(g)=r(g)$. لذلك، c_V هو تشاكل $G \to F^{\times}$، ومنه فإن هذا التعريف "الميزة الخطية" يتوافق بشكل أساسي مع التعريف الأول.

تمهيدية 36.7 لأي G - مودول V و V'،

$$c_{V \oplus V'} = c_V \oplus c_{V'}$$

البرهان. بحساب مصفوفة g_L مع بالنسبة لقاعدة $V \oplus V'$ التي تشكلت بتركيب قاعدة V مع قاعدة V'.

لتكن $S_1,\dots,S_t$ مجموعة كل تمثيلات صفوف التماثل من FG - مـودولات بـسيطة بحيث نختار S_1 ليكون التمثيل التافه، ولتكن $c_1,\dots,c_t$ الميزات المقابلة.

قضية 37.7 إن الدوال $c_1,\dots,c_t$ مستقلة خطياً على F، أي أنه، إذا كـان $c_1,\dots,c_t \in F$ بحيث يكون $\sum_i c_i c_i(g)=0$ لكل $g \in G$، عندئذٍ كل c_i تساوي الصفر.

البرهان. نكتب $F[G] \approx M_{f_1}(F)\times\dots\times M_{f_t}(F)$، وليكن $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$. عندئذٍ e_i تؤثر كما يؤثر 1 على S_i و كذلك 0 على S_j لكل $i \neq j$، ومنه

$$c_j(e_i)=\begin{cases} f_i=\dim_F S_i, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \qquad (25)$$

لذلك

$$\sum_i c_i c_i(e_i)=c_i f_i,$$

و التي منها ينتج مايلي.

قضية 38.7 يكون FG - المودولان متماثلين إذا وفقط إذا كانت ميزاتهما متساوية.

البرهان. لقد برهنا تماماً بأن ميزة التمثيل تعتمد فقط على صف التماثل لها. بالعكس، إذا كان $V=\bigoplus_{1\le i\le t} c_i S_i$، $c_i \in$ ، عندئذٍ فإن ميزتها هي $c_V=\sum_{1\le i\le t} c_i c_i$، و من (25) يتبين بأن $c_i=c_V(e_i)/f_i$. لذلك فإن c_V يحدد الجداء بكـل S_i تظهـر فـي V، وبالتالي فإنه يحدد صف التماثل لـ V.

39.7 تكون القضية خاطئة إذا كان F يحوي على المميـز $p \neq 0$. مـثلاً، إن التمثيـل $\mathrm{GL}_2(F) \leftarrow C_p : \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **a** s^i في (c1.7) ليس تافهاً، لكنه يحوي على الميزة نفسها كالتمثيل التافه. حتى أن القضية خاطئة عندما يكون مميز F لا يقسم رتبة الزمرة، لأنه، لأي تمثيل $G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$، يكون مميز تمثيل G على pV يتطابق معه الصفر.

أي دالة $G \rightarrow F$ التي يمكن أن يعبر عنها كـ **Z** - تركيب خطي من الميزات تـسمى بالميزة التقديرية (virtual character)[23].

قضية 40.7 إن الميزة البسيطة للزمرة G تشكل **Z** - قاعدة لميزات G التقديرية.

البرهان. لتكن $c_1,\ldots,c_t$ الميزات البسيطة في G. عندئذٍ فإن ميزات G هي تماماً الدوال الصفية التي يمكن أن يعبر عنها بالشكل $\sum m_i c_i, m_i \in$ ، ومنه فإن الميزات التقديريـة هي تماماً الدوال الصفية التي يمكن أن يعبر عنها بالشكل $\sum m_i c_i, m_i \in \mathbf{Z}$. لـذلك فـإن الميزات البسيطة تولد بالتحديد الـ **Z** - مودول للميزات التقديرية ، و تبـين القـضية 7.37 بأنها مستقلة خطياً على **Z** (و حتى على F).

قضية 41.7 إن الميزات البسيطة في G تشكل F - قاعدة للدوال الصفية على G.

البرهان. إن الدوال الصفية هي الدوال المؤلفة من مجموعة الصفوف المترافقة في G إلـى F. كما أن هذه المجموعة تحوي على t عنصر، تشكل F - فضاءً متجهياً بعده t. كما أن الميزات البسيطة هي مجموعة العناصر المستقلة خطياً للفضاء المتجهي لذلك، يجب أن تشكل قاعدة.

نفرض الآن بأن F حقل جزئي في ثابت بالنسبة للترافق المركب c **a** $\bar{c}$. للدوال الصفية f_1 و f_2 على G، تعرف

$$\left(f_1 \middle| f_2\right) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f_1(a) \overline{f_2(a)}$$

تمهيدية 42.7 إن الزوج (|) هو جداء داخلي على F - فضاء الدوال الصفية على G.

البرهان. علينا أن نبرهن بأن

---

[23] بعض المؤلفين يدعونها الميزات العامة، لكن حتى يكون هذا متجنباً: يوجد أكثر من طريقة واحـدة لتعمـيم مفهوم الميزة.

- $(f_1+f_2|f)=(f_1|f)+(f_2|f)$ لكل الدوال الصفية f_1، f_2، f،
- $(cf_1|f_2)=c(f_1,f_2)$ لكل $c\in f$ و الدالتين الصفيتين f_1، f_2،
- $(f_2|f_1)=\overline{(f_1|f_2)}$ لكل الدوال الصفية f_1، f_2،
- $(f|f)>0$ لكل الدوال الصفية غير المعدومة f.

إن كل ذلك واضح من التعريف.

لكل $F[G]$ - المودول V، يرمز $F[G]$ للمودول الجزئي من العناصر المثبتة بـ G:

$$V^G=\{v\in V\,, gv=v\,;\, g\in G\}$$

تمهيدية 7.43 ليكن p العنصر $\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}a$ في $F[G]$. لأي $F[G]$ - المودول V، $p\,v$ هو إسقاط بصورة V^G.

البرهان. لأي $g\in G$،

$$gp=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}ga=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}a=p \tag{26}$$

والتي منها يكون $p\,p=p$ (في F - الجبر $F[G]$). لذلك، لأي $F[G]$ - المودول V، $p_v^2=p\,v$ ومنه $p\,v$ يكون إسقاطاً. إذا كانت v صورتها، نقول بأن $v=p\,v_0$، عندئذٍ

$$gv=g\,p\,v_0\overset{\text{def}}{=}p\,v_0=v$$

ومنه فإن v ينتمي إلى V^G. وبالعكس، إذا كان $v\in V^G$، من الواضح أن $p\,v=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}av=v$، ومنه فإن v ينتمي إلى صورة لـ p.

قضية 44.7 لأي $F[G]$ - مودول V،

$$\dim_F V^G=\frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}c\,V(a)$$

البرهان. ليكن p كما في التمهيدية 7.43. لأن $p\ v$ إسقاط، يكون V المجموع المباشر لـ 0- فضاءاتها الذاتية و 1- فضاءاتها الذاتية، و نبين بأن الحرف هو V^G. لذلك، $\mathrm{Tr}V\ (p\ V\ ) = \dim_F V^G$. من جهة أخرى، لأن الأثر هو دالة خطية،

$$\mathrm{Tr}v\ (p\ V\ ) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G} \mathrm{Tr}V\ (a\ v\ ) = \frac{1}{|G|}\sum_{a\in G}\ c\ V\ (a)$$

مبرهنة 45.7 لأي $F[G]$ - المودولين V، W،

$$\dim_F \mathrm{Hom}_{F[G]}(V, W\ ) = (c\ V \mid c\ W\ )$$

البرهان. تؤثر الزمرة G على الفضاء $\mathrm{Hom}_F(V, W\ )$ لـ F - التطبيقات الخطية لقاعدة $V \to W$،

$$(g\,j\,)(v\,) = g\,(j\,(v\,)),\ \ g \in G,\ \ j \in \mathrm{Hom}_F\,(V\ ,W\ ),\ v \in V$$

و $\mathrm{Hom}_F\,(V\ ,W\ )^G = \mathrm{Hom}_{FG}\,(V\ ,W\ )$.

نتيجة 46.7 إذا كان c و c' ميزتين بسيطتين، عندئذٍ

$$(c \mid c') = \begin{cases} 1, & c = c' \\ 0, & c \neq c' \end{cases}$$

لذلك فإن المميزات البسيطة تشكل قاعدة متعامدة لفضاء الدوال الصفية على G.

قائمة خواص الزمرة

للكتابة

الأمثلة

للكتابة.

نلاحظ بأن العهد التاريخي لتمثيل نظرية الزمر المنتهية، يؤكد العمل "المساهمين الأساسيين الأربعة لهذه المبرهنة في مراحل تشكيلها: فيرديناند جورج فروبينيوس، ويليام برينسايد، غساي سيشور، ريتشارد بروايرـ، انظر Curtis 1999"

للكتابة

الزمر الجبرية الخطية

تطور المبرهنة بشكل كاف لتكون قادرة على تصنبف الزمر الجبرية البسيطة المنفصلة و تمثيلاتها في حدود مخططات دنكين. نذكر كيف نشأت زمر كوستير. نناقش كيفية تسجيل زمر المصفوفات البسيطة المنتهية.

طبولوجية الزمر

تطور المبرهنة الأساسية و تناقش المواضيع الآتية: قياسات هار، تصنيف الزمر المتراصة موضعياً الأبلية، ثنائية بونتريغين، تمثيل الزمر المتراصة.

زمر لي

تطور المبرهنة الأساسية، إن معظم الزمر الطبولوجية هي زمر لي، تشرح العلاقة بين الزمر الجبرية، و تستنتج تصنيف الزمر البسيطة، تذكرة بالزمر الجزئية الحسابية

الملحق A

تمارين محلولة

تتراوح هذه الحلول ما بين التلميح أحياناً وبين الحلول الكاملة أحياناً أخرى. أتوقع من الطلاب أن يكتبوا الحل بشكل كامل.

1-1. بالاختبار، إن العنصر الوحيد من الرتبة 2 هو $c = a^2 = b^2$. بما أن gcg^{-1} هو أيضاً من الرتبة 2، وبالتالي يجب أن يساوي c، أي أن، $gcg^{-1} = c$ لكل $g \in Q$. لهذا فإن c تتبادل مع جميع عناصر Q، و $\{1, c\}$ زمرة جزئية ناظمية في Q. إن الزمر الجزئية المتبقية من الرتب 1، 4، أو 8، وهي ناظمية بشكل تلقائي (انظر35.1a).

1- 2. إن العنصر $ab = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$، و $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1-3. نأخذ المجموعات الجزئية $\{g, g^{-1}\}$ من G. كل مجموعة تحوي على عنصرين فقط ما عدا g الذي يكون من الرتبة 1 أو 2، في الحالة التي تحوي على 1 عنصر. بما أن G تساوي الاجتماع المنفصل لهذه المجموعات، يجب أن يوجد (لا يساوي الصفر) عدد زوجي من المجموعات المؤلفة من 1 عنصر ، وبالتالي يوجد عنصر واحد على الأقل من الرتبة 2.

1 -4. بما أن الزمرة G/N من الرتبة n، $(gN)^n = 1$ لكل $g \in G$ (مبرهنة لاغرانج). لكن $(gN)^n = g^nN$، ومنه $g^n \in N$. بالنسبة للحالة الثانية، نعتبر $N = \{1, t\} \subset D_3$. وهي من الدليل 3، لكن العنصر $t\, s$ من الرتبة 2، ومنه $(t\, s)^3 = t\, s \notin N$.

1 -5. ليكن $a, b \in G$. و لدينا $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$. بحالة خاصة، $abab = e$. بالضرب من اليمين بالعنصر ba، نجد بأن $ab = ba$.

1 -6. من الواضح أن قابلية القياس هي عملية انعكاسية وتناظرية، يكفي أن نبرهن بأنها متعدية. سوف نستخدم على أنه إذا كانت H زمرة جزئية في G بدليل منته في G، عندئذٍ $H \cap G'$ من دليل منته في G' لأي زمرة جزئية G' في G (لأن التطبيق الطبيعي

$G'/H \cap G' \to G/H$ غامر). باستخدام هذا التطبيق، ينتج بأنه إذا كانت H_1 و H_3 قابلة للقياس مع H_2، عندئذٍ $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ من دليل منته في $H_1 \cap H_2$ و في $H_2 \cap H_3$ (وبالتالي في H_1 و H_3 أيضاً). كما أن $H_1 \cap H_3 \supset H_1 \cap H_2 \cap H_3$، وهي أيضاً من دليل منته في كل من H_1 و H_3.

2-1. نلاحظ أولاً أن أي زمرة مولدة بمجموعة تبديلية من العناصر يجب أن تكون تبديلية، ومنه فإن الزمرة G تبديلية في المسألة. من (2.8)، نجد بأن أي تطبيق $\{a_1,...,a_n\} \to A$ حيث A تبديلية يتمدد بشكل وحيد إلى التشاكل $G \to A$، ومنه فإن للزمرة G الخاصة العامة التي تميز الزمر الحرة الآبلية على المولدات a_i.

2-2. (a) إذا كان $a \neq b$، عندئذٍ فإن الكلمة $a...ab^{-1}...b^{-1}$ مختزلة و $\neq 1$. لذلك، إذا كان $a^n b^{-n} = 1$، عندئذٍ $a = b$. (b) بشكل مشابه. (c) إن الشكل المختزل لـ $x^n, x \neq 1$، من الطول n على الأقل.

2-3. (a) بشكل عام. (b) $C_\infty \times C_\infty$ تبديلية، و الزمر الحرة التبديلية هي 1 و C_∞ فقط. (c) بفرض أن a كلمة مختزلة غير خالية في $x_1,...,x_n$، نقول بأن $a = x_i ...$ (أو $x_i^{-1} ...$). لكل $j \neq i$، إن الشكل المختزل لـ $\left[x_j, a\right] \overset{\text{def}}{=} x_j a x_j^{-1} a^{-1}$ لا يمكن أن يكون خالياً، ومنه فإن a و x_j لا يتبادلان.

2-4. إن العنصر الوحيد من الرتبة 2 هو b^2. للزمرة $Q_n / \langle b^2 \rangle$ المولدان a و b، والعلاقات $a^{2^{n-2}} = 1,\ b^2 = 1,\ b a b^{-1} = a^{-1}$، والذي هو تمثيل للزمرة $D_{2^{n-2}}$ (انظر 2.9).

2-5. (a) بمقارنة تمثيل $D_4 = \langle r^4, s^2, s r s r = 1 \rangle$ مع تمثيل G نقترح وضع $r = ab$ و $s = a$. راجع (باستخدام 2.8) بأنه توجد التشاكلات:

$$D_4 \to G,\quad r \mapsto ab,\quad s \mapsto a,\quad G \to D_4,\quad a \mapsto s,\quad b \mapsto s^{-1}r$$

إن كل من المركبات $D_4 \to G \to D_4$ و $G \to D_4 \to G$ هي التطبيقات المحايدة على العناصر المولدة، ولذلك (2.8 أيضاً) فهي التطبيقات المحايدة. (b) تهمل.

2-6. بملاحظة أن $ab^3a^{-1} = b c^3 b^{-1}$. لكن $b^3 = 1$ و $c^3 = 1$. لذلك $a = 1$. عندئذٍ من العلاقة الأخيرة نجد بأن $b = 1$.

8-2. إن العناصر x^2، xy، y^2 تنتمي إلى النواة، وبسهولة نرى بأن $\langle x,y \mid x^2, xy, y^2 \rangle$ من الرتبة (على الأكثر) 2، وبالتالي يجب أن تولد النواة (باعتبارها زمرة ناظمية على الأقل – المسألة غير واضحة). في البداية يمكننا مباشرةً أن نبرهن بأن هذه العناصر حرة، أو نطبق مبرهنة نلسون- سشرير (2.6). نلاحظ بأن الصيغة في p. 30 (بشكل دقيق) تتنبأ بأن النواة حرة ومن الرتبة $3=1+2-2.2$.

8-2. علينا أن نبين بأنه إذا كان العنصران s و t من زمرة منتهية و يحققان $t^{-1}s^3t=s^5$، عندئذٍ فإن العنصر المعطى g يساوي ١. لذلك، $s^n=1$ لبعض n. تكون الحالة المشوقة عندما $(3,n)=1$. لكن في هذه الحالة، $s^{3r}=s$ لبعض من r. و بالتالي $t^{-1}s^{3r}t=\left(t^{-1}s^3t\right)^r=s^{5r}$. الآن،

$$g=s^{-1}\left(t^{-1}s^{-1}t\right)s\left(t^{-1}st\right)=s^{-1}s^{-5r}s\,s^{5r}=1;$$

انظر [في مسألة كهذه، بحثت عن نموذج للتفصيل. أخذت وقتاً لأرى ذلك أيضاً، لكن ما حدث أخيراً أنه كان للعنصر g مرافقان فيها، كما فعلته العلاقات بالنسبة لـ G لذلك حاولت أن أجد العلاقة بينهم].

1-3. إن النقاط الموصلة للحل هي أن $\langle a\rangle=\langle a^2\rangle\times\langle a^n\rangle$. نطبق (1.49) لنرى بأن D_{2n} تتحلل كما في الجداء.

2-3. لتكن N الزمرة الجزئية الوحيدة من الرتبة 2 في G. عندئذٍ G/N من الرتبة 4، لكن لا توجد زمرة جزئية $Q\subset G$ من الرتبة 4 حيث $Q\cap G=1$ (لأن كل زمرة من الرتبة 4 تحوي على زمرة من الرتبة 2)، ومنه $G\neq N\times_j Q$ لأي Q. بنفس النقاش نطبقه على الزمر الجزئية من الرتبة 4.

3-3. لأي $g\in G$، gMg^{-1} زمرة جزئية من الرتبة m، و لذلك فهي تساوي M. لهذا فإن M (وبشكل مشابه N) زمرة جزئية ناظمية في G، و MN زمرة جزئية في G. إن رتبة أي عنصر في $M\cap N$ يقسم $\gcd(m,n)=1$، ومنه فهي تساوي 1. الآن تبين (1.50) أن $M\times N\approx MN$، والتي بعد ذلك ستكون من الرتبة mn، وبالتالي فهي تساوي G.

4-3. بين أن $\mathrm{GL}_2(\mathrm{F}_2)$ تبادل المتجهات الثلاثة غير المعدومة في $\mathrm{F}_2\times\mathrm{F}_2$ (فضاء متجهي من البعد 2 على F_2).

5-3. إن الحلول الآتية مقترحة من قبل القارئين. نكتب الزمرة الرباعية بالشكل

$$Q=\{\pm 1,\pm i,\pm j,\pm k\}$$

(A) نأخذ مكعباً. نكتب ستة عناصر من Q من الرتبة 4 على الأوجه الستة حيث i هو معاكس $-i$، الخ.. كل دوران للمكعب ينتج تماثلاً ذاتيـاً للزمـرة Q، و $\operatorname{Aut}(Q)$ هـي الزمرة التناظرية للمكعب، S_4.

(B) تحوي الزمرة Q على عنصر من الرتبة 2، وهو تحديداً 1-، و ستة عناصر مـن الرتبة 4 وهي تحديداً $\pm i,\pm j,\pm k$. أي تماثل a للزمرة Q يجب أن يرسـل 1- إلـى نفسه و ويبادل العناصر من الرتبة 4. نلاحظ بأن $i\,j=k,\ j\,k=i,\ k\,i=j$، لذلك فإن a يجب أن ترسل المجوعات المرتبة بشكل دائري إلى المجموعات نفسها، أي ، إلى أحـد المجموعات الثمانية التي في القائمة:

$$\begin{array}{ccccccc} i & j & k & \qquad & -i & -j & k \\ i & -j & -k & & -i & j & -k \\ i & k & -j & & -i & -k & -j \\ i & -k & j & & -i & k & j \end{array}$$

ولأن $a(-1)=1$، يمكن أن تبادل a أسطر القائمة، وليس من الصعب أن نرى بأن كـل التباديل ممكنة.

3-6. إن الزوج

$$Q=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}\right\} \text{ و } N=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

يحقق الشروط (i) و (ii) و (iii) في (3.7). مثلاً، من أجل (i) (يقول Maple بأن)

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b\\ 0 & a & c\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & b\\ 0 & a & c\\ 0 & 0 & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{b}{d}+\frac{1}{d}(b+ab)\\ 0 & 1 & -\frac{c}{d}+\frac{1}{d}(c+ac)\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

لا تشكل جداءً مباشراً للزمرتين لأنها ليست تبديلية.

4-1. ليكن g مولداً للزمرة C_∞. عندئذٍ فإن المولد الآخر الوحيد هو g^{-1}، و التماثل غير التافه الوحيد هو $g \mapsto g^{-1}$. بالتالي $\operatorname{Aut}(C_\infty)=\{\pm 1\}$. إن التشاكل $S_3\to \operatorname{Aut}(S_3)$ متباين لأن $Z(S_3)=1$، لكن S_3 يحوي على ثلاثة عناصر هي a_1، a_2 و a_3 من الرتبة

2 و على عنصرين وهما b و b^2 من الرتبة 3. إن العنصرين a_1 و b يولـــدان S_3، و يوجد فقط ستة احتمالات من أجل $a(a_1)$، $a(b)$، ومنه $S_3 \to \mathrm{Aut}(S_3)$ غامر أيضاً.

4-2. لتكن H زمرة جزئية فعلية في الزمــرة G، ولــتكن $N = N_G(H)$. إن عــدد مرافقات H يحقق $(G:N) \leq (G:H)$ (انظر 4.8). بما أن كل مرافق لــ H يحوي على $(H:1)$ عنصر و المرافقات تتداخل (على الأقل) في $\{1\}$، نرى بأن
$$\left| \bigcup gHg^{-1} \right| < (G:H)(H:1) = (G:1).$$
بالنسبة للجزء الثاني، نختار S لتكون مجموعة من تمثيلات صفوف الترافق.

4-3. بالعودة إلى 4.17 و 4.18، توجد زمرة جزئية ناظمية N من الرتبــة p^2، والتــي تكون تبديلية. نبين الآن أن G تحوي على عنصر c من الرتبة p و لا ينتمي إلـــى N، وبالتالي فإن $G = N \rtimes \langle c \rangle$، الخ...

4-4. لتكن H زمرة جزئية دليلها p، ولتكن N نواة التطبيق $G \to \mathrm{Sym}(G/H)$ - وهي أكبر زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في H (انظر 4.22). إذا كان $N \neq H$، عندئذٍ $(H:N)$ تقبل القسمة على العدد الأولي $q \geq p$، و $(G:N)$ تقبل القسمة علـــى pq. لكن pq لا تقسم $p!$ - وهذا تناقض.

4-5. نثبت G في S_{2m}، وليكن $N = S_{2m} \cap G$. عندئذٍ $G/N \to S_{2m}/A_{2m} = C_2$، ومنه $(G:N) \leq 2$. ليكن a عنصر من الرتبة 2 في G، وليكن $b_1,...,b_m$ مجموعــة من المرافقات اليمينية للزمرة $\langle a \rangle$ في G، لذلك فــإن $G = \{b_1, ab_1, ..., b_m, ab_m\}$. إن صورة a في S_{2m} هو جداء m مناقلة $(b_1, ab_1), ..., (b_m, ab_m)$، وبما أن m فردي، ينتج بأن $a \notin N$.

4-6. (a) إن عدد الأسطر الأولى الممكنة يساوي $2^3 - 1$، و الأسطر الثانيــة $2^3 - 2$، و الأسطر الثالثة $2^3 - 2^2$، وبالتالي $(G:1) = 7 \times 6 \times 4 = 168$.

(b) ليكن $V = \mathbb{F}_2^3$. عندئذٍ $|V| = 2^3 = 8$. كل خط مار من مبدأ الإحداثيات يحوي علـــى نقطة واحدة تماماً لا تساوي مبدأ الإحداثيات، ومنه $|X| = 7$.

(c) نشكل قائمة بالمميزات الممكنة و كثيرات الحدود الأصغرية:

رتبة العنصر في الصف	الحجم	الحدودية الأصغرية	المميزات
1	1	$X+1$	X^3+X^2+X+1
2	21	$(X+1)^2$	X^3+X^2+X+1
4	42	$(X+1)^3$	X^3+X^2+X+1
3	56	نفسه	$X^3+1=(X+1)(X^2+X+1)$
7	24	نفسه	X^2+X+1 (غير قابل للتحليل)
7	24	نفسه	X^3+X^2+1 (غير قابل للتحليل)

إن الحجم هنا يرمز إلى عدد عناصر صفوف الترافق.

الحالة 5: ليكن a التشاكل الذاتي مع كثيرة الحدود المميزة X^3+X^2+1. نجد من كونها كثيرة حدود أصغرية أن $a^7=1$، ومنه فإن a من الرتبة 7. نلاحظ أن V عبارة عن $\mathbb{F}_2[a]$ - مودول حر ومن رتبة واحدة، ومنه فإن ممركز a في G هو $\mathbb{F}_2[a]\cap G=\langle a\rangle$. لهذا $|C_G(a)|=7$، وعدد العناصر في صف ترافق a يساوي $168/7=24$.

الحالة 6: تماماً كما في الحالة 5.

الحالة 4: هنا $V=V_1\oplus V_2$ كما أنه $\mathbb{F}_2[a]$ - مودول، و

$$\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[a]}(V)=\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[a]}(V_1)\oplus\mathrm{End}_{\mathbb{F}_2[a]}(V_2)$$

ينتج أن $|C_G(a)|=3$، ومنه عدد مرافقات a يساوي $\frac{168}{3}=56$.

الحالة 3: يكون هنا $C_G(a)=\mathbb{F}_2[a]\cap G=\langle \not\gtrsim \rangle$، التي تكون من الرتبة 4.

الحالة 1: a هو العنصر الحيادي هنا.

الحالة 2: في هذه الحالة يكون $V=V_1\oplus V_2$ عبارة عن $\mathbb{F}_2[a]$ - مودول، حيث يؤثر a كتأثير 1 على V_1 ويملك كثيرة الحدود X^2+1 على V_2. إما تتحلل، أو إنها بسيطة نلاحظ بأن صف الترافق هذا يحوي على العناصر الباقية.

(d) بما أن $168=2^3\times3\times7$، ستكون الزمرة الجزئية الخاصة غير التافهة من الرتبة

2, 4, 8, 3, 6, 12, 24, 7, 14, 28, 56, 21, 24، أو 84

إذا كانت H ناظمية، ستكون عبارة عن اجتماع منفصل لـ $\{1\}$ و بعض صفوف الترافق الأخرى، ومنه $(N:1)=1+\sum c_i$ حيث c_i تساوي 21، 24، 42، أو 56، لكن لن يحدث هذا.

4-7. بما أن $G/Z(G)\to \mathrm{Aut}(G)$، نرى أن $G/Z(G)$ دائرية، و من (4.19) نجد بأن G تبديلية. إذا كانت G منتهية و غير دائرية، فهي تحوي العامل $C_{p^r}\times C_{p^s}$ الخ ..

4-8. من الواضح أن $(i\ j)=(1j)(1i)(1j)$. بالتالي أي زمرة جزئيــة تحــوي علــى $(12),(13),...$ تحوي على كل المناقلات، و نعلم بأن S_n مولدة بالمناقلات.

4-9. نلاحــــــــظ بــــــــأن $C_G(x)\cap H=C_H(x)$، وبالتــــــــــالي ســـــــــيكون $H/C_H(x)\approx H.C_G(x)/C_G(x)$. برهن أن كل صف يحوي على نفس العدد c من العناصر. عندئذٍ

$$|K|=(G:C_G(x))=(G:H.C_G(x))(H.C_G(x):C_G(x))=kc$$

4-10. (a) المساواة الأولى تأتي من المسألة السابقة. بالنسبة للثانية، نلاحظ أن s تتبــادل مع كل الأدوار في تحليلها، ومنه يجب أن تكون زوجية (أي أن، طولها فــردي)، إذا كــان لدورين الطول الفردي نفسه k، يمكن أن نجد أولاً جداء k مناقلة تتبادل معهم. و تتبادل مع s، وبالعكس، نبين أنه إذا كانت تجزئة n المعرفة بـــ s تتألف مــن أعــداد صــحيحة مختلفة، عندئذٍ تتبادل s فقط مع الزمرة المولدة بالأدوار في تحليلها الدوري.

(b) نسجل صفوف الترافق في S_7، أحجامها، التماثل، و (عندما يكون التكافؤ زوجيــاً) فيما إذا كان منفصلاً في A_7.

	الدور	الحجم	تماثل	منفصلة في A_7	تحوي $C_7(s)$
1	(1)	1	E	N	
2	(12)	21	O		
3	(123)	70	E	N	(67)
4	(1234)	210	O		
5	(12345)	504	E	N	(67)
6	(123456)	840	O		
7	(1234567)	720	E	Y	720 لا تقسم 2520
8	$(12)(34)$	105	E	N	(67)
9	$(12)(345)$	420	O		
10	$(12)(3456)$	630	E	N	(12)
11	$(12)(3456)$	504	O		
12	$(123)(456)$	280	E	N	$(14)(25)(36)$
13	$(123)(4567)$	420	O		
14	$(12)(34)(56)$	105	O		
15	$(12)(34)(567)$	210	E	N	(12)

4-11. بالعودة إلى Maple، $n=6,\ a \mapsto (13)(26)(45),\ b \mapsto (12)(34)(56)$.

4-12. بما أن $\operatorname{Stab}(gx_0)=g\operatorname{Stab}(x_0)g^{-1}$، إذا كان $H\subset\operatorname{Stab}(x_0)$ عندئذٍ $H\subset\operatorname{Stab}(x_0)$ لكل x، ومنه $H=1$، بنقض الفرض. تكون الآن $\operatorname{Stab}(x_0)$ أعظمية، ومنه $H.\operatorname{Stab}(x_0)=G$، التي تبين بأن H تؤثر بشكل متعدٍ.

5-1. ليكن p عدداً أولياً يقسم $|G|$ و لتكن p - زمرة سيلو الجزئية S، من الرتبة p^m.

عندئذٍ تحوي S على الأكثر

$$1+p+\dots+p^{m-1}=\frac{p^m-1}{p-1}<p^m$$

عنصر رتبة كل منها أقل من p^m، وبالتالي يجب أن تحوي على عنصر من الرتبة p^m. لذلك، تكون دائرية، ومنه فهي تحوي على p^m-p^{m-1} عنصر من الرتبة p^m. p - زمرة سيلو الجزئية الثانية ستحوي أيضاً على p^m-p^{m-1} عنصراً من الرتبة p^m، و ستكون مختلفة عن عناصر S، ولا يمكن أن توجد زمرة مثلها. لذلك فإن G تحوي على p - زمرة سيلو جزئية واحدة فقط لكل p يقسم رتبتها، و كل منها تكون دائرية. الآن تبين

(5.9) أن G عبارة عن جداء لزمر دائرية رتبة كل منها أعداد أولية نسبياً، و بالتالي تكون هي أيضاً دائرية.

الملحق B

مسائل غير محلولة

34. برهن أن الزمرة المنتهية G تحوي على زمرة جزئية أعظمية واحدة فقط ويجب أن تكون p - زمرة دائرية، p عدد أولي.

35. ليكن a و b عنصرين من S_{67}. إذا كان كل من a و b من الرتبة 146 و $ab = ba$، ما هي الرتب الممكنة للجداء ab؟

36. بفرض أن G زمرة مولدة بالمجموعة X.
(a) بين أنه إذا كان $gxg^{-1} \in X$ لكل $x \in X\ ,\ g \in G$، عندئــذٍ الزمــرة الجزئيــة المبادلة في G مولدة بمجموعة كل العناصر $xyx^{-1}y^{-1}$ لكل $x, y \in X$.
(b) بين أنه إذا كان $x^2 = 1$ لكل $x \in X$، عندئذٍ فإن الزمرة الجزئيــة H فــي G مولدة بمجموعة كل العناصر xy لكل $x, y \in X$ من الدليل ١ أو 2.

37. بفرض $p \geq 3$ و $2p-1$ عددين أوليين (مثلاً، $p = 3,7,19,31,...$). برهن ، أو لا تبرهن بمثال، أن كل زمرة من الرتبة $p(2p-1)$ تبديلية.

38. لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G. برهن أو لا تبرهن مايلي:
(a) إذا كانت G منتهية و P عبارة عن p - زمرة سيلو جزئية، عندئذٍ $P \cap H$ هي p - زمرة سيلو جزئية في H.
(b) إذا كانت G منتهية، P عبارة عن p - زمرة سيلو جزئية، و $H \supset N_G(P)$، عندئذٍ $N_G(H) = H$.
(c) إذا كان g عنصراً من G حيث إن $gHg^{-1} \subset H$، عندئذٍ $g \in N_G(H)$.

39. برهن أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 616.

40. ليكن n و k عددين صحيحين $1 \leq k \leq n$. لتكن H زمرة جزئية في S_n مولــدة بالدور $(a_1, ..., a_k)$. أوجد رتبة ممركز H في S_n. بعدئذٍ أوجد رتبة مــنظم H فــي S_n. [منظم H هو المجموعة $g \in G$ حيث $ghg^{-1} = h$ لكل $h \in H$. و هي أيــضاً زمرة جزئية في G.]

41. برهن أو لا تبرهن الحالة الآتية: إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة غير منتهية G، عندئذٍ لكل $x \in G$، يتحقق $xHx^{-1} \subset H \Rightarrow x^{-1}Hx \subset H$.

42. لتكن H زمرة جزئية ناظمية منتهية من الزمرة G، ولــيكن g عنــصر مــن G. بفرض أن g من الرتبة n و أن العنصر الوحيد من H الذي يتبادل مع g هو ١. بين أن:

(a) التطبيق $h \mapsto g^{-1}h^{-1}g\,h$ تقابل من H إلى H.

(b) المرافق gH يتألف من عناصر G ذوات الرتب n.

43. بين أنه إذا كانت تبديلة ما في زمرة جزئية G من S_n ترسل x إلـى y، عندئـذٍ لمنظمات كل من المثبتات $\mathrm{Stab}(x)$ و $\mathrm{Stab}(y)$ لــ x و y الرتبة نفسها.

44. برهن أنه إذا كانت كل زمر سيلو الجزئية من زمرة منتهية G ناظمية و آبلية، عندئـذٍ فإن الزمرة آبلية.

45. بفــرض أن زمـــرة مـــا مولـــدة بالعنـــصرين a و b و تحقـــق العلاقـــات: $a^3 = b^2,\ a^m = 1,\ b^n = 1$ حيث m و n أعداداً صحيحة موجبة. من أجل أي قيمة لــــ m و n يمكن أن تكون G غير منتهية.

46. بين أنه إذا كانــت G زمـرة مولـدة بالعنـصرين x و y و العلاقـات المعرفـة $x^2 = y^3 = (xy)^4 = 1$ هي زمرة قابلة للحل، و أوجد رتبة G و زمرها المشتقة المتتالية G', G'', G'''.

47. G زمرة مولدة بالمجموعة الناظمية X المؤلفة من العناصر من الرتبة 2. بـين أن الزمرة الجزئية المبدلة G' في G مولدة بكل مربعات الجداء $x\,y$ لأزواج من عناصـر X.

48. حدد المنظم N في $\mathrm{GL}_n(F)$ المؤلف من الزمر الجزئية H للمصفوفات القطرية، و برهن أن N/H متناظرة مع الزمرة المتناظرة S_n.

49. لتكن G زمرة مولدة بالعنصرين x و y و العلاقات المعرفـة $x^2,\ y^5,\ (xy)^4$. ما هو الدليل في G للزمرة المبدلة G' في G.

50. لتكن G زمرة منتهية، و H زمرة جزئية مولدة بالعناصر ذات الرتب الفردية. بـين أن H ناظمية، و أن رتبة G/H قوى للعدد 2.

51. لتكن G زمرة منتهية، و لتكن p - زمرة سيلو الجزئية P. بين أنه إذا كانت H زمرة جزئية في G حيث إن $N_G(P) \subset H \subset G$ عندئذٍ

(a) إن منظم H في G يساوي H،

(b) $(G:H) \equiv 1 \pmod{p}$.

52. لتكن G زمرة من الرتبة 25 . 33. بين أن G قابلة للحل. (هنت: الخطوة الأولى هي إيجاد زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 11 باستخدام مبرهنات سيلو.)

53. بفرض أن a تشاكل ذاتي للزمرة G الذي هو تطبيق من G إلى G بكاملها و يتبادل مع كل التماثلات الذاتية الداخلية للزمرة G. بين أنه إذا كانت تساوي زمرتها الجزئية المبادلة، عندئذٍ $ax = x$ لكل x في G.

54. لتكن G زمرة منتهية مع المولدات s و t و التي كل منهما من الرتبة 2. لتكن $n = (G:1)/2$.

(a) بين أن G زمرة جزئية دائرية من الرتبة n. بفرض أن n عدد فردي.

(b) صف جميع صفوف ترافق G.

(c) صف جميع الزمر الجزئية في G التي تكون من الشكل $C(x) = \{y \in G \mid xy = yx\}, x \in G$.

(d) صف جميع الزمر الجزئية الدائرية في G.

(e) صف جميع الزمر الجزئية في G في حالتي (b) و (d).

(f) برهن أن أي p - زمرتين جزئيتين في G مترافقتان (p أولي).

55. إذا كانت G تؤثر بشكل متعدٍ على المجموعة X. و لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، و لتكن Y مجموعة مدارات N في X. برهن أن:

(a) يوجد مؤثر طبيعي للزمرة G على المجموعة Y الذي يكون متعدياً وبين أن كل مدار من مدارات N على X لها القدرة نفسها.

(b) وضح بمثال أنه إذا كانت N غير ناظمية عندئذٍ فإنه ليس من الضروري أن تكون لمداراتها القدرة نفسها.

56. برهن أن كل زمرة جزئية أعظمية من p - زمرة منتهية تكون ناظمية بدليل أولي (p أولي).

57. لتكن G زمرة فوق دائرية (metacyclic) إذا حوت على زمرة جزئية ناظمية دائرية N مع زمرة القسمة الدائرية G/N. برهن أن الزمر الجزئية و زمر القسمة من الزمر تحت الدائرية هي زمر فوق دائرية. برهن أو لا تبرهن أن الجداءات المباشرة لزمر فوق دائرية هي فوق دائرية.

58. لتكن G زمرة مؤثرة بشكل متعدٍ ومضاعف على المجموعة X، وليكن $x \in X$. برهن أن:

(a) المثبت G_x لـ x هو زمرة جزئية أعظمية في G.

(b) إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G، عندئذٍ إما N جزئية في G_x أو تؤثر بشكل متعدٍ على X.

59. ليكن x و y عنصرين من الزمرة G حيث إن $x\,y\,x^{-1} = y^{5}$، x من الرتبة 3، و $y \neq 1$ من رتبة فردية. اوجد (بدون برهان) رتبة y.

60. لتكن H زمرة جزئية أعظمية من الزمرة G، ولتكن A زمرة جزئية ناظمية في الزمرة H حيث إن مرافقات A في G تولدها.

(a) برهن أنه إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية في G، عندئذٍ إما $N \subset H$ أو $G = NA$.

(b) لتكن M تقاطع مرافقات H في G. برهن أنه إذا كانت G تساوي زمرتها الجزئية المبادلة و A آبلية، عندئذٍ G/M زمرة بسيطة.

61. (a) برهن أن مركز الزمرة غير الآبلية من الرتبة p^3، p أولي، يكون من الرتبة p.

(b) ما هي الزمرة غير الآبلية من الرتبة ٦١ التي يكون مركزها غير دائري.

62. بين أن الزمرة مع المولدات a و b و العلاقات المعرفة

$$a^{2} = b^{2} = \left(a\ b\right)^{3} = 1$$

متماثلة مع زمرة التناظرات S_3 من الدرجة 3 بإعطاء، مع البرهان، التماثل الصريح.

63. برهن أو أعط مثال معاكس:

(a) كل زمرة من الرتبة 30 تحوي على زمرة جزئية ناظمية من الرتبة ٥1.

(b) كل زمرة من الرتبة 30 تكون عديمة القوى.

64. ليكن $t \in \mathbf{Z}$، ولتكن G زمرة مع المولدات x و y و العلاقات $x\,y\,x^{-1}=y^{t},\ x^{3}=1$.

(a) ما هي الشروط اللازمة و الكافية على t لتكون G منتهية.

(b) في الحالة التي تكون فيها G منتهية، حدد رتبتها.

65. لتكن G زمرة من الرتبة $p\,q$، $p \neq q$ عددان أوليان.

(a) برهن أن G قابلة للحل.

(b) برهن أنه إذا كانت G عديمة القوى $\Leftrightarrow$ G آبلية $\Leftrightarrow$ G دائرية.

(c) هل G عديمة القوى؟ (برهن أو أوجد مثال معاكس).

66. لتكن X مجموعة مؤلفة من p^{n} عنصر، p أولي، و لتكن G زمرة منتهية تؤثر على X بشكل متعدٍ. برهن أن كل p - زمرة سيلو جزئية في G تؤثر على X بشكل متعدٍ.

67. لتكن $G=\left\langle a,b,c \,\middle|\, b\,c=c\,b,\ a^{4}=b^{2}=c^{2}=1,\ a\,c\,a^{-1}=c,\ a\,b\,a^{-1}=b\,c \right\rangle$.
حدد رتبة G و أوجد المتسلسلة المشتقة للزمرة G.

68. لتكن N زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من الزمرة عديمة القوى G. برهن أن $N \cap Z(G) \neq 1$.

69. لا تفرض مبرهنات سيلو في المسألة.

(a) لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G، و لتكن P p - زمرة سيلو الجزئية في G. برهن أنه يوجد $x \in G$ حيث إن $x\,P\,x^{-1} \cap H$ هي p - زمرة سيلو الجزئية في H.

(b) برهن أن الزمرة المؤلفة من المصفوفات $\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ من النوع $n \times n$ هي p - زمرة سيلو الجزئية في $GL_{n}\left(\mathbb{F}_{p}\right)$.

70. بفرض أن H زمرة جزئية ناظمية في الزمرة المنتهية G حيث إن G/H دائرية ومن الرتبة n، حيث n و $(G:1)$ أوليان نسبياً. برهن أن G يساوي الجداء شبه المباشر $H \times_{q} S$ حيث S زمرة جزئية دائرية من الرتبة n.

71. لتكن H زمرة جزئية ناظمية أصغرية من الزمرة G المنتهية و القابلة للحل. برهن أن H متماثلة مع المجموع المباشر للزمر الدائرية من الرتبة p لبعض من الأعداد الأولية p.

72. (a) برهن أنه تكون رتبة الزمرتين الجزئيتين A و B من الزمرة G منتهية إذا كانت $A \cap B$ من رتبة منتهية.

(b) يقال عن العنصر x في الزمرة G أنه FC - عنصر إذا كان مثبته من دليل منته في G. برهن أن مجموعة جميع FC عناصر في G تكون ناظمية.

73. لتكن G زمرة من الرتبة p^2q^2 للعددين الأوليين $p > q$. برهن أن G تحوي على زمرة جزئية ناظمية من الرتبة p^n لبعض $n \geq 1$.

74. (a) لتكن K زمرة منتهية عديمة القوى، ولتكن L زمرة جزئية في K بحيث $L.dK = K$، حيث dK زمرة جزئية مشتقة. برهن أن $L = K$. [يجب أن تفرض بأن الزمرة المنتهية تكون عديمة القوى إذا وفقط إذا كانت كل زمرة جزئية أعظمية تكون ناظمية].

(b) لتكن G زمرة منتهية. إذا حوت G على زمرة جزئية H بحيث يكون كل من G/dH و H عديمة القوى، برهن أن G عديمة القوى.

75. لتكن G p - زمرة غير دائرية منتهية. برهن أن الشروط الآتية متكافئة:

(a) $(G : Z(G)) \leq p^2$.

(b) كل زمرة جزئية أعظمية في G تكون آبلية.

(c) توجد على الأقل زمرتان جزئيتان أعظميتان بحيث تكونان آبليتين.

76. برهن أن كل زمرة G من الرتبة 56 يمكن أن تكتب (بشكل غير تافه) على شكل جداء شبه مباشر. أوجد (بدون برهان) زمرتين غير متماثلتين و غير آبليتين من الرتبة 56.

77. لتكن G زمرة منتهية و $j : G \to G$ تشاكل

(a) برهن أنه يوجد عدد صحيح $n \geq 0$ حيث إن $j^n(G) = j^m(G)$ لكل الأعداد الصحيحة $m \geq n$. لتكن $a = j^n$.

(b) برهن أن G جداء شبه مباشر للزمرتين الجزئيتين $\mathrm{Ker}(a)$ و $\mathrm{Im}(a)$.

(c) برهن أن $\mathrm{Im}(a)$ ناظمية في G أو أعط مثال معاكس.

78. لتكن S مجموعة تمثيلات لصفوف الترافق في زمرة منتهية G و لتكن H زمـــرة جزئية في G. برهن أن $S \subset H \Rightarrow H = G$.

79. لتكن G زمرة منتهية.

(a) برهن أنه توجد زمرة جزئية وحيدة K في G بحيث (i) G/K قابلة للحل و (ii) إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية و G/N قابلة للحل، عندئذٍ $N \supset K$.

(b) برهن أن K متميزة.

(c) برهن أن $K = [K,K]$ و أن $K = 1$ أو K غير قابلة للحل.

الملحق C

امتحان لساعتين

1. أي من الحالات الآتية صحيحة (أعط تعليلاً موجزاً لكـل مـن (a) و (b) و (c) و (d)، أعط مجموعة صحيحة من محتويات (e)).

(a) إذا كـان كـل مـن a و b عنـصرين مـن زمـرة، عندئـذٍ $a^2 = 1, \quad b^3 = 1 \;\Rightarrow\; (ab)^6 = 1$.

(b) العنصران الآتيان مترافقان في S_7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) إذا كانت G و H زمـرتين منتهيتـين و $G \times A_{594} \approx H \times A_{594}$، عندئذٍ $G \approx H$.

(d) الزمرة الجزئية الوحيدة في A_5 تحوي (123) هي A_5 نفسها.

(e) عديمة القوى $\Leftarrow$ دائرية $\Leftarrow$ تبديلية $\Leftarrow$ قابلة للحل (من أجل زمرة منتهية).

2. ما عدد 11- زمر سيلو الجزئية يمكن أن يكون زمرة من الرتبة $110 = 2.5.11$؟ صنف الزمر من الرتبة 110 التي تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 10. هل كل زمرة من الرتبة 110 تحوي على زمرة جزئية من الرتبة 10.

3. لتكن G زمرة منتهية عديمة القوى. بين أنه إذا كانت كل زمرة قسمة تبديليـة فـي G دائرية، عندئذٍ فإن G تبديلية. هل الحالة صحيحة من أجل الزمر غير عديمة القوى.

4. (a) لتكن G زمرة جزئية من $\mathrm{Sym}(X)$، حيث X مجموعة من n عنـصر. إذا كانت G تبديلية و تؤثر بشكل متعدٍ على X، بين أن كل عنصر $g \neq 1$ من G يحـرك كل عنصر من X. واستنتج بأن $(G:1) \leq n$.

(b) لكل $m \geq 1$، أوجد الزمر الجزئية التبديلية من S_{3m} من الرتبة $3m$.

(c) بين أن الزمرة الجزئية التبديلية من S_n تكون من الرتبة $\leq 3^{\frac{n}{3}}$.

5. لتكن H زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G، ولتكن P زمرة جزئية في H. افرض أن كل تماثل ذاتي في H يكون داخلياً. برهن أن $G = H.N_G(P)$.

6. (a) أعط وصفاً لزمرة مع المولدات x و y و معرفة بالعلاقات $y x y^{-1} = x^{-1}$.

(b) أعط وصفاً لزمرة مع المولدات x و y و معرفة بالعلاقات $y x y^{-1} = x^{-1},\ x y x^{-1} = y^{-1}$.

يمكنك أن تستخدم النتائج التي برهنت في الصف أو الملاحظات، لكن ينبغي أن تشير بوضوح إلى ما تستخدمه.

الحل

1. (a) خاطئة: في $\langle a,b \mid a^2, b^3 \rangle$، ab من رتبة غير منتهية.

(b) صحيحة، التحليل الدوري هو $(1357)(246),(123)(4567)$.

(c) صحيحة، نستخدم مبرهنة كرول- سيشميدت.

(d) خاطئة، الزمرة المولدة تكون فعلية.

(e) دائرية $\Rightarrow$ تبديلية $\Rightarrow$ عديمة القوى $\Rightarrow$ قابلة للحل.

2. إن عدد 11- زمر سيلو الجزئية $s_{11} = 1,12,...$ و تقسم 10. بالتالي توجد 11- زمر سيلو جزئية واحدة فقط P. ولها

$$G = P \times_q H,\quad P = C_{11},\quad H = C_{10},\quad H = D_5$$

علينا الآن أن ننظر إلى التطبيق $q : H \to \operatorname{Aut}(C_{11}) = C_{10}$. نعم، من توطئة سيشور- زاسينهاوس.

3. بفرض أن G يملك صفاً $1<$. عندئذٍ تحوي G على زمرة القسمة H من الصف 2. نعتبر

$$1 \to Z(H) \to H \to H/Z(H) \to 1$$

عندئذٍ H تبديلية من (4.17)، و هذا تناقض. لذلك فإن G تبديلية و بالتالي فهي دائرية.

بالتبادل، بالاستقراء، الذي يبين بأن $G/Z(G)$ دائرية.

لا! في الحقيقة، ليس صحيحاً من أجل الزمر القابلة للحل (مثلاً، S_3).

4. (a) إذا كان $g x = x$، عندئذٍ $g h x = h g x = h x$. بالتالي فإن g يثبت كل عنصر من X، ومنه $g = 1$. نثبت $x \in X$، عندئذٍ $g x : G \to X$ $g \mapsto g$ غامر.

[نلاحظ أن مبرهنة كايلي تعطي التشاكل الذاتي $(G:1)$ $G \to S_n,\ n =$].

(b) بتجزئة المجموعة إلى مجموعات جزئية من الرتبة 3، و لتكن $G = G_1 \times ... \times G_m$.

(c) لتكن $O_1, ..., O_r$ مدارات G، و لتكن G_i صورة G في $\mathrm{Sym}(O_i)$. عندئذٍ $G \to G_1 \times ... \times G_r$، ومنه (بالاستقراء)،

$$(G:1) \le (G_1:1)...(G_r:1) \le 3^{\frac{n_1}{3}} ... 3^{\frac{n_r}{3}} = 3^{\frac{n}{3}}$$

5. لتكن $g \in G$، و لتكن $h \in H$ حيث إنها مرافقة h على H تتوافق مع مرافقة g. عندئذٍ $gPg^{-1} = hPh^{-1}$، ومنه $h^{-1}g \in N_G(P)$.

6. (a) إنها الزمرة

$$G = \langle x \rangle \times_q \langle y \rangle = C_\infty \times_q C_\infty$$

مع $q : C_\infty \to \mathrm{Aut}(C_\infty) = \pm 1$. بالتبادل، يمكن أن تكتب العناصر بشكل وحيد بالشكل $x^i y^j, i, j \in \mathbf{Z}$، و $y x = x^{-1} y$.

(b) إنها الزمرة الرباعية. من العلاقتين نحصل على

$$y x = x^{-1} y, \quad y x = x y^{-1}$$

ومنه $x^2 = y^2$. من العلاقة الثانية

$$x y^2 x^{-1} = y^{-2}, = y^2,$$

ومنه $y^4 = 1$.

بالتبادل، تبين خوارزمية تود- كوكسيتير أنها زمرة جزئية من S_8 مولدة بالعناصر $(1287)(3465)$ و $(1584)(2673)$.

Bibliography

ALPERIN, J. L. AND BELL, R. B. 1995. Groups and representations, volume 162 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.

ARTIN, M. 1991. Algebra. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ.

ASCHBACHER, M. AND SMITH, S. D. 2004. The classification of quasithin groups. I, II, volume 111, 112 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. Structure of strongly quasithin *K*-groups.

BESCHE, H. U., EICK, B., AND O'BRIEN, E. A. 2001. The groups of order at most 2000. *Electron. Res. Announc. Amer. Math.* Soc. 7:1–4 (electronic).

BRAUER, R. AND FOWLER, K. A. 1955. On groups of even order. *Ann. of Math*. (2) 62:565–583.

BURNSIDE, W. 1897. Theory of groups of finite order. Cambridge: at the University Press, Cambridge

CURTIS, C. W. 1999. Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer, volume 15 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI

FEIT, W. 1995. On the work of Efim Zelmanov. *In* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Z¨urich, 1994), pp. 17–24, Basel. Birkh¨auser.

FEIT, W. AND THOMPSON, J. G. 1963. Solvability of groups of odd order. *Pacific J. Math*. 13:775–1029.

HALL, JR., M. 1959. The theory of groups. The Macmillan Co., New York, N.Y.

HUMPHREYS, J. E. 1990. Reflection groups and Coxeter groups, volume 29 of Cambridge *Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

MASSEY, W. S. 1967. Algebraic topology: An introduction. Harcourt, Brace & World, Inc., New York.

PYBER, L. 1993. Enumerating finite groups of given order. *Ann. of Math*. (2) 137:203–220.

RONAN, M. 2006. Symmetry and the monster. Oxford University Press, Oxford. One of the greatest quests of mathematics.

ROTMAN, J. J. 1995. An introduction to the theory of groups, volume 148 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition.

SERRE, J.-P. 1980. Trees. Springer-Verlag, Berlin. Translated from the French by John Stillwell.

SOLOMON, R. 2001. A brief history of the classification of the finite simple groups. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 38:315–352 (electronic).

SYLOW, M. L. 1872. Th´eor`emes sur les groupes de substitutions. *Math. Ann.* 5:584–594.